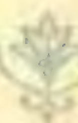
高等学校教学用書



爆震原理

Я. Б. 澤尔道維奇
A. C. 康巴涅耶茨
著

高等教育出版社

高等学校教学用書



爆　震　原　理

Я. Б. 澤尔道維奇
A. C. 康巴遑耶茨　著
徐　华　舫　譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版，澤尔道維奇（Я. Б. Зельдович）与康巴涅耶茨（А. С. К мпанеец）合著的“爆震原理”（Теория детонации）一書1955年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等学校教学参考書。

書中首先概述了气体动力学基础，然后分别闡述無損失的和有損失的爆震的理論，并叙述了濃集爆炸物的爆震和爆震产物的运动。

本書可供高等工業学校动力机械和国防工業类有关專業作教学参考書用，特别是对燃气輪机專業有参考价值；亦可供高等学校及科学研究机关与高速气体动力学有关的研究工作者作参考。

爆　震　原　理

Я. Б. 澤尔道維奇　А. С. 康巴涅耶茨著

徐华舫譯

高等教育出版社出版 北京琉璃厂170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　　新华書店总經售

統一書号15010·621　開本850×1168 1/32　印張7 5/16　字数178,000　印数0001—1,500

1958年2月第1版　1958年2月北京第1次印刷　定價（10）¥1.10

序

爆震理論是气体动力学最重要的应用領域之一。自从爆震現象为人所發現之后不久，这种現象便获得以震波理論为基础的正确解釋。按照这种解釋說来，混合气在震波中溫度的提高引起了爆炸性的反应，反应所放出的能量支持爆震波向前推进。这样就建立了爆震的流体动力学理論。对爆震产物的运动作一定的假設（契浦門-儒格[1]假設）并从这个假設出發，流体动力学理論才能够解釋爆震波的一个基本性質：在爆炸物（或混合气）的給定初始狀况之下，爆震波的速度是定值。

这里应該指出，关于爆震，除了正确的流体动力学理論之外，長时期以来存在着各种荒誕的解釋，这些解釋都是建立在对于反应傳播机構的錯誤概念上的。目前这些荒誕的企圖已經絕迹了。

爆震的流体动力学理論，在苏联科学院化学物理研究所很成功地發展起来了。有賴于該研究所的工作，契浦門-儒格假設才有了理論根据，按照这条假設，反应完畢时爆震产物中的当地音速恰等于对反应产物而言的爆震速度。亞音速情况之不可能，那是早就証明了的，至于超音速情况之不可能，現在也已弄清楚了，那是与爆震波中进行反应的条件有关系的。

在这个研究所的若干著作中，人們最感兴趣的螺旋爆震現象获得了解釋，这种螺旋爆震現象是發生在爆震極限附近的；还弄清楚了由燃燒轉变为爆震的特征及条件，發現了不常見的在人工粗糙管中爆震推进的情况；还闡明了在光滑管中爆震推进的極限范

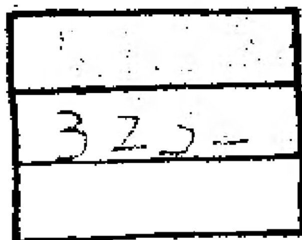
① Чепмен-Жуг。

圍是很狹的，弄清楚了一系列在濃集爆炸物的爆震理論中具有重大意义的事实。

这本書是根据化学物理研究所的研究成果写出来的第一本有系統的爆震理論書籍。因此本書中的資料引証可能有某些不够充分的地方。

什理雅宾托赫（И. Я. Шляпинтох）为本書选擇了所引用的实驗数据，并作了解說，沙道夫斯基（М. А. Садовский）和阿宾（А. Я. Апин）对書中資料的論述提出許多宝貴的批評意見，謹此一并致謝。

Я. 澤尔道維奇， А. 康巴涅耶茨



目　　录

第一章　气体动力学基础

§1. 震波的基本理論

震波① 理論是研究爆震波理論所必需的基础，同时在了解爆炸的机械作用上也很重要。

用一个簡單的只用到力学定律的例子，就能得到震波理論的各主要方程。

設有一活塞以等速运动进入一直筒（圖 1），压縮活塞前的液体或气体。任何扰动在介質里傳播都是有一定速度的，所以，在活塞前面必形成一段有限長度的已压縮介質区。圖 1 上，这便是包在活塞与 AA' 面之間的那塊地区。

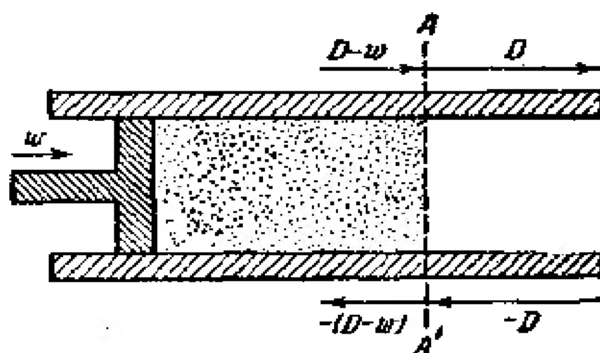


圖 1.

随着活塞的运动，AA' 面將以某个速度 D 对未經扰动的气体而移动。現在我們来找出把速度 D 同活塞移动速度和受压縮介質的热力学性質連系起来的关系式。

我們假定压縮过程进行得很快，快到可以不計气体的热傳导，即可以不計已压縮气体傳給未压縮气体的和傳給筒壁的热量。此外，更不考慮气体的內摩擦。这一点在下列情况下就能成立：筒相当粗大，筒壁对大部分气体的运动沒有很大的影响。

因为我們已把 AA' 相对于筒壁的推进速度記为 D，所以，如

① 一名冲击波——譯者注。

果記活塞相对于筒壁的速度为 w, AA' 面相对于活塞的速度便是 $D-w$。設 t 代表从压缩开始起算的时間，那末被活塞压縮过的一段介質总長度便是 $(D-w)t$。若 Φ 代表筒截面积，或說活塞面积也完全一样，那末已压縮过的介質体积便等于 $\Phi(D-w)t$。而这些介質原先的体积是等于 ΦDt 的，因为活塞对筒和未压縮的气体而言，它的移动距离是 wt(圖 2)。

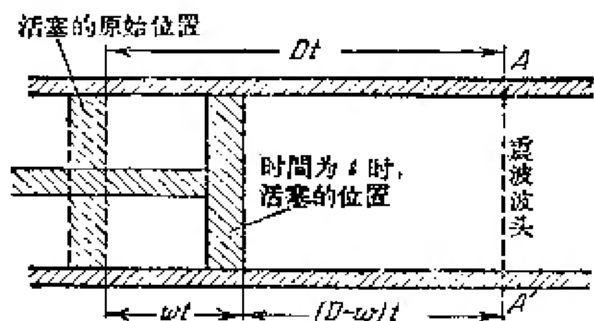


圖 2.

記介質的原始密度为 ρ_0，压縮后的密度为 ρ。那末 t 时間內被活塞压縮过的介質質量便是 $\rho\Phi(D-w)t$，显然这些質量又等于 $\rho_0\Phi Dt$。消去 Φt，进行压縮时的質量守恒定律便可写成:

$$\rho_0 D=\rho(D-w). \tag{1.1}$$

已压縮过的介質具有活塞的速度 w，这个速度絕不等于压縮区边界 AA' 相对于未压縮介質的推进速度。所以，$\rho_0 D\Phi t$ 这些質量一旦进入压縮过后的狀况，便具有了速度 w。按牛頓第二定律，質量乘速度变量便等于冲量，即等于力乘作用时間。記已压縮介質的压强为 p，未压縮介質的压强为 p_0，則作用在活塞与 AA' 面之間那塊質量上的合力便等于 $(p-p_0)\Phi$，而 t 时間內的冲量便是 $(p-p_0)\Phi t$。

由此得

$$\rho_0 Dw=p-p_0. \tag{1.2}$$

由 (1.1)(1.2) 两方程就可以求出 D 和 w 的表达式。首先从 (1.1)得

$$w=\frac{\rho-\rho_0}{\rho}D. \tag{1.3}$$

因为密度 ρ 大于密度 ρ_0，由(1.3)方程可見，D 与 w 的指向是相同

的。而如果活塞的动作是使气体膨脹的，则运动方向与圖1上所画的箭头相反，那末 w 与 D 的指向便相反了。对这种情形需要作特别研究，因为这样一来，运动的特性本身就改变了(参看§2)。这相当于所謂膨脹波。現在把 w 的式子代入(1.2)，得：

$$D^2=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{p-p_0}{\rho-\rho_0}, \tag{1.4}$$

$$w^2=(p-p_0)\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho}\right). \tag{1.5}$$

有时把密度改用單位質量的体积——比容 $v=\frac{1}{\rho}$ 来表示比較方便些；于是上兩式就成为

$$D^2=v_0^2\frac{p-p_0}{v_0-v}, \tag{1.6}$$

$$w^2=(p-p_0)(v_0-v). \tag{1.7}$$

把这兩个式子开方时，D 与 w 应取同号。

現在来写能量方程。

因为气体沒有放热出去，也沒有吸热进来，它的全部能量的变化自应等于外界对它所做的功。設 E_0 代表气体單位質量所具有的原始內能(有时称为热能)，E 代表已压縮气体單位質量的內能。已压縮气体單位質量的动能是 $\frac{w^2}{2}$。整个已压縮气体的質量等于 $\rho_0 D\Phi t$，所以在压縮时，气体能量的全部变化等于 $\rho_0 D\Phi t\left(E+\frac{w^2}{2}-E_0\right)$。这个量应等于同一 t 时間內外力对气体所做的功。这份功是活塞做的，它以 $p\Phi$ 力对气体作用，走了距离 wt。

所以，能量方程是这样的：

$$\rho_0 D\left(E+\frac{w^2}{2}-E_0\right)=pw. \tag{1.8}$$

現在按(1.3)公式通过 D 来表示 w。此外，最好把方程中的密度用比容代替，并用(1.7)式来表示 w^2。这样便得

$$E-E_0=\frac{p+p_0}{2}(v_0-v).\tag{1.9}$$

有一点是很明显的：气体的能量变化与初始压强及最后压强的平均值成正比。这一点，在决定弱震波的不可逆程度时，是極重要的（参看§2）。

除能量外，往往用到所謂焓或热函数这个物理量，这个量和能量的关系如下：

$$H=E+pv,\tag{1.10}$$

按(1.9)和(1.10)兩式，焓的变化是这样一个式子：

$$H-H_0=\frac{v+v_0}{2}(p-p_0).\tag{1.11}$$

只要知道介質的热力学性質，就能把能量E表为压强和比容的函数，$E=E(p,v)$。把这个函数关系代入(1.9)，便得(p,v)面上一条曲綫的方程。这条曲綫以初始比容及初始压强为其参数。显然，这条曲綫必經过p_0,v_0点，这是因为把$p=p_0$, $v=v_0$代进去，必使(1.9)变为恒等式（可参看§3；(3.8)）。这条曲綫称为雨貢紐(Гюгонио)絕热綫。这条曲綫說明从給定的初始狀况p_0,v_0起，气体通过AA'面时用一次压縮的办法能达到哪些狀况。介質的密度和比容在AA'面上發生了突躍的变化。这种压縮称为突躍压縮，而AA'面即是震波。

不要以为这样的一种压縮过程是沿雨貢紐絕热綫进行的。恰恰相反，受突躍压縮的气体显然并不經过雨貢紐絕热綫上那些点所代表的p,v面上一系列狀况（参看后文）。雨貢紐絕热綫所給的是在已知初始狀况p_0,v_0之下，全部可能的压縮終了狀况p和v。

如果把突躍压縮过程分为兩步：由p_0开始，先到p'，然后再由p'到p，第二个波上介質的压强突躍是$p-p'$，这个波是在已被压强突躍为$p'-p_0$的波所压縮过的介質中进行的，則第二个波的初始狀况便是p'、v'，这个v'是經第一波压縮过后的比容。但过p', v'

点并以該点为初始狀况的一条雨貢紐絕热綫与那条以 p_0, v_0 为初始狀况的雨貢紐絕热綫是并不重合的。因此，經第二个震波压縮后的終了比容 v''，一般說来并不等于 v，而是小于 v 的，这个 v 是用压强突躍为 $p-p_0$ 的一个震波把介質压縮到的比容値。

所以，突躍压縮和等熵压縮①是大不相同的。作等熵压縮时，終了狀况与过程分几步来进行是完全沒有关系的，而只决定于初始狀况和压强的全部变化。可見，等熵压縮是可逆的，而突躍压縮則是不可逆的。

在推导(1.4)，(1.5)，(1.9)和(1.11)諸方程时，对于受压縮介質的性質并沒做任何的假設。在把这些方程用于具体的介質之前，我們且將这些方程用另一种更概括些的方法表示出来。

我們把某种物理量的密流，規定为單位質量的該物理量乘以介質的密流。介質密流的本身便等于密度 ρ 乘介質的流速。这就是單位时間內流过与速度方向相垂直的一塊單位面积（1平方厘米）的質量流量。动量密流的算法与此类似。也就是說，因为質量 m 的动量是質量乘速度，所以單位質量的动量就等于速度。而單位时間內通过与流速方向相垂直的一塊單位面积（1平方厘米）的質量在数値上等于速度乘密度。那末，这些質量所具有的动量便等于質量乘速度的平方了。总起来說，任何一种物理量的密流必等于介質的密流 ρw 乘單位質量的該种物理量。

現在把密流的概念用到 AA' 面的运动上去。后面要証明到的是：在这个面的兩边極貼近它，可以划兩个控制面，气体的密度和速度的整个变化是在这兩个控制面之間極窄的地帶中进行的。如果不要詳細研究，这些物理量怎样从位于已压縮气体中的左側控制面上的情况，变到位于未压縮气体中的右側控制面上的情况，那末，整个的变化过程便可以看作是密度、压强和速度等突躍变化的

① 我們不把等熵压縮称为絕热压縮，以免与雨貢紐絕热綫相混淆。

推进。这种突躍，上面已經說过，称为震波。

圖1上表示一种最簡單的得到震波的方法。震波的一切方程都可以簡單地从質量、动量和能量三守恒定律推出来，办法是把这三条定律直接用于通过突躍兩側控制面的那些介質。

仍和以前一样，把波的推进速度記为 D。最好把坐标系改变一下，取作与波一同运动，这样比較方便。对这一坐标系而言，未經扰动的介質速度便是 $-D$(圖1下面的箭头)，而已压縮介質的速度是 $-(D-w)$。于是通过右側控制面的介質密流等于 $-\rho_0 D$，而通过左側控制面的介質密流是 $-\rho(D-w)$。使这兩个值相等，便又得方程(1.1)$\rho_0 D=\rho(D-w)$.

右边的动量密流等于 $\rho_0 D\cdot D=\rho_0 D^2$，左边的等于 $\rho(D-w)^2$。所以，單位时間内兩控制面之間的动量变化就是这兩个值之差。按牛頓第二定律这个差应該等于作用力，即等于左右兩边的压强差 $p-p_0$。所以，对运动坐标系說来，(1.2)方程成这样

$$\rho_0 D^2-\rho(D-w)^2=p-p_0. \tag{1.12}$$

不难看出，这个方程同(1.1)一起就完全等于(1.2)方程，而且由这兩个方程解 D 和 w 还是得(1.4)和(1.5)兩式。

方程(1.12)可以看作是 $\rho_0 D^2+p_0$ 这个量在震波中的守恒关系。从这个方程的推导方法本身看得出，这个方程可以用于任何一个控制面，与控制面所在的位置無关。

关于能量守恒定律的式子也可以用同样的論述得出来。

按能量密流的定义，我們看到，从右边进去的能量是 $\rho_0 D\left(E_0+\frac{D^2}{2}\right)$，而从左边出来的能量是 $\rho(D-w)\left[E+\frac{(D-w)^2}{2}\right]$，兩控制面之間的能量变化必等于外力所做的功。單位时間内作用在單位面积上的功，等于作用在單位面积上的力(即压强)乘單位时間内的移动距离(即速度)。因此在右側控制面上功是 $-p_0 D$，而在

左側控制面上功是 $p(D-w)$。右側功的負号表示这是已压縮介質对未压縮介質所做的功。这样，我們便得到能量平衡关系：

$$\rho_0 D\left(E_0+\frac{D^2}{2}\right)-\rho(D-w)\left[E+\frac{(D-w)^2}{2}\right]=p(D-w)-p_0 D. \tag{1.13}$$

这个方程与(1.8)是等价的，这只要用上面(1.1)和(1.2)兩式就很容易証明。这个方程显然可以表为下列的物理量守恒律：

$$E_0+\frac{D^2}{2}+\frac{p_0}{\rho_0}=E+\frac{(D-w)^2}{2}+\frac{p}{\rho}. \tag{1.14}$$

用焓来表示的同一条守恒律可以写为：

$$H_0+\frac{D^2}{2}=H+\frac{(D-w)^2}{2}. \tag{1.15}$$

从这个式子很容易导出(1.9)至(1.11)各式。

(1.14)和(1.15)兩方程是在与波一起运动的坐标系上导出来的。在这种坐标系上，运动是定常的。而在定常运动下，柏努利定理总是应該成立的，按柏努利定理，單位質量的焓与动能二者之和应守恒。这就是方程(1.15)。在固定坐标系上，震波当然就不是定常运动了，柏努利定理就不能用。

按上面这样来考慮通过兩个控制面的气流，所得到的結論使我們多少得以从另一方面来看震波中的各种守恒律。我們無論在什么地方都不需要把左側控制面放在已压縮介質中很远的地方，远到那里的密度和压强都已达到标志突躍强度的最大値。我們可以把(1.1)，(1.12)，(1.13)三方程用于过渡区中任何一个面，以及右边未扰动区中任何一个未起变化的面，把这兩个面看作控制面。不过这时，p 所代表的就不是仅为狀况方程所决定的靜压强，而是某一种动压强了，这种动压强决定于介質在突躍压縮中狀况的变化方式，这是不可逆过程所特具的。在这里，压强的力学定义，即压强是作用在單位面积上的力，指向与面积相垂直这个定义，当

仍旧有效，因为牛顿第二定律中的力就是按这个定义用的。

所以，如果我們賦予方程(1.12)中的压强 p 以純力学的意义的話，那末(1.4)，(1.5)，(1.6)，(1.7)各式对于任何一对控制面都是可用的。但如果像我們所假定的那样波是定常的話，那末，D 値对于任何控制面說来都是同一数値，因而震波中比容便与压强成直綫关系变化，它由初始的 v_0 降为 v [参看(1.6)式]。在 (p, v) 圖綫上，这就得到一条通过給定的 p_0, v_0 点的直綫。这时，代表震波中能量变化的(1.9)式便有了一种簡單的几何意义，它就是以 p 和 p_0 为上下底，以 v_0-v 为高的一塊梯形的面积(圖3)。因此，如果 p 是指总共的力学压强，即包括靜压和非靜压兩部分，那就有这样一个关系存在：$dE=-pdv$①。

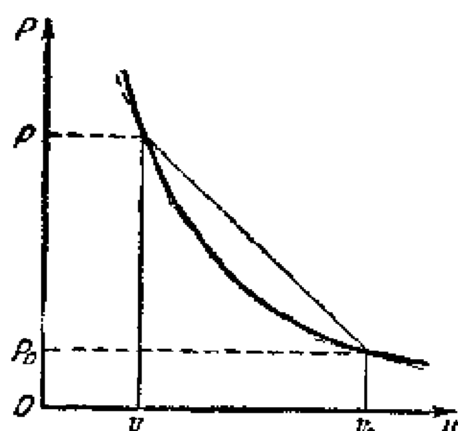


圖 3.

非靜压部分是这样来的：气体比容和其他的热力学量的变化不是無限緩慢，而是具有一定速度的。这时，压强便不仅决定于比容的瞬間値，而且还决定于比容怎样随时間变化的全部过程。例如，如果比容的变化不是太快的話，压强便决定于比容的瞬間値，并决定于比容的变化速率。此外，如果压强不是靜压强的話，那末就不能認为它与作用面的方向無关，即巴斯卡定律不成立。

但是，不管震波推进时所發生的是个怎样的不可逆过程，只要給定震波的速度，那末初始狀况和終了狀况便是完全互相决定的。

① 在澤尔道維奇(Я. Б. Зельдович)著的"震波原理及气体动力学引論"(苏联科学院出版社，1946)一書第89頁上說到，在某些情况下，压强 p 并不随 v 作直綫变化。这时 p 便只是指靜压强部分，这个値为热力学各量的瞬間値所决定。

这兩种狀况之間只用三条守恒定律来联系。

如果震波的波幅很小，即如果密度、压强及其他各量的突躍值与这些量在未扰动介質中的原来数値相比都是很小的，那末过渡区中的过程动力学就可以利用粘性和热傳导的概念来进行研究。这时發現，气体中过渡区的厚度比分子自由路程的長度大得多了；这就肯定了利用宏观的粘性値及热导率値是正确的。如果震波很强的話，全部突躍过程是在一个分子自由路程这样一个長度內完成的，这从流体动力学观点看来，震波的厚度便等于零。而宏观的方程，只有在各物理量的平均値在一个分子自由路程之內的变化是微不足道的时候，才能用。

但是，不管决定定常震波中压强的那个不可逆过程的机構是什么样的，总之合压强必符合 (p, v) 圖綫上的直綫关系。这是質量守恒和动量守恒兩定律的必然結果。

在震波之后的終了边界控制面上，压强是純静压强，可以說能量和焓都只是 p, v 的函数。知道了介質的热力学性質之后，就可以把这兩个函数代入方程(1.9)和方程(1.11)。这时，如前述，在 (p, v) 圖綫上便得到所謂雨貢紐絕热綫。曲綫上凡是大于 p_0 的点都各代表一个定常的震波，这是由給定的 p_0 和 v_0 出發所能得到的一切可能震波。

至于說到圖 3 上所画的弦綫，那圖上的 p 是指的总压强。要把静压部分从总压强里分出来，一般是困难的。

§2. 弱震波

这一节里要研究的是波幅小到極限的震波，其中压强变化的相对値是不大的：$p-p_0 \ll p_0$，比容变化也不大，$v_0-v \ll v_0$。对于这种波，方程(1.9)中的一切差値都可以代以微分，而 $\frac{p+p_0}{2}$ 可以

代以压强的平均値，这个平均値完全可以重新記为 p。于是方程(1.9)变成 $dE=-pdv$。而一般説来，$dE=TdS-pdv$，这里的 S 是熵，由此可見，在波幅够小的震波里，$dS=0$，即这种波是等熵的。

其实，dS 是与压强突躍的三阶無穷小成正比的，$dS\sim(dp)^3$①。关于 dS 的估算后面还要詳細講到。

在(p,v)面上，代表等熵的曲綫我們永远称为等熵綫②。

p 与 v 之間的等熵关系方程是一个單値关系式。因此在極弱的震波，D^2 的(1.6)式就应改写为

$$D^2=-v_0^2\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S. \tag{2.1}$$

而右側的数値不是別的，正就是未扰动介質中的音速平方 c_0^2。因此，弱到了極限的弱震波，其速度便与波幅無关了。

由方程(1.7)可見，弱震波中介質微团的移动速度 w 是与相对突躍値的一阶無穷小成正比的，这是因为

$$p-p_0=-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S(v-v_0)=-\frac{c_0^2}{v_0^2}(v-v_0),$$

由此

$$w=\frac{c_0}{v_0}(v_0-v)=\frac{c_0}{\rho_0}(\rho-\rho_0). \tag{2.2}$$

对于$(p-p_0)$也得类似的式子，只要用 w 表 v_0-v 即得

$$p-p_0=\frac{c_0w}{v_0}. \tag{2.3}$$

在現在这种問題上我們滿可以簡單地以 c, v 及 p 代替 c_0, v_0 及 $p-p_0$，而把下标 0 留給后面用。这里要再一次指出，(2.1)，(2.2)，(2.3)三个式子只适用于弱波。

---

① 参看 Я. Б. 澤尔道維奇著："震波原理及气体动力学引論"，苏联科学院出版社，1946。

② 这种曲綫通常称为泊松(Пуассон)絕热綫；我們这里采用"等熵"这个术語，为的是免得泊松絕热綫和雨貢紐絕热綫两名詞相混。

現在我們來推演弱震波中 D 的表达式，精确度要达到把介質运动速度的一阶無穷小項包括进去。

在圖 3 上的 (p, v) 和 (p_0, v_0) 兩点，作雨貢紐絕热綫的兩切綫（虛綫）。在很短一段上，絕热曲綫可代以一条对称于該兩点的拋物綫，而这样一条拋物綫的割綫之斜率便等于兩端点上兩切綫之斜率的平均値。因为按假定，波是弱波，所以它只占絕热綫上很短的一段，而可以用拋物綫去代替。因而

$$\frac{p-p_0}{v_0-v}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial v}+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0\right].$$

現在通过兩个音速 $\frac{c^2}{v^2}$ 和 $\frac{c_0^2}{v_0^2}$ 来表示 $-\frac{\partial p}{\partial v}$ 和 $-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0$。上式右側就变成

$$\frac{1}{2v_0^2}\left(c^2\frac{v_0^2}{v^2}+c_0^2\right)=\frac{1}{2v_0^2}\left(c^2\frac{D^2}{(D-w)^2}+c_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2v_0^2}\left[\frac{(c+c_0)^2}{2}+w(c+c_0)\right].$$

这里我們用到了这样一点，即差値 $c^2+c_0^2-\frac{1}{2}(c+c_0)^2=\frac{1}{2}(c-c_0)^2$ 是二阶無穷小，并且 w 是一阶無穷小，因而在 w 为一阶無穷小之下系数的精确度也可以选用到一阶無穷小。把原来等式的左側表为 $\frac{D^2}{v_0^2}$，并开方，就以同一精确度得到：

$$D=\frac{c+c_0+w}{2}\text{①}. \tag{2.4}$$

重要的是，在推导这个公式时，只用了質量守恒律和动量守恒律。

这里所推得的弱波式子使我們得以了解一定波幅的震波是怎样形成的。为此，我們再来看看用活塞做的实驗。

假定活塞的运动是逐漸加速的，起先以極小的速度 w 运动，这

① 这个式子是蘭道（Л. Д. Ландау）在推导弱波的波幅变化規律时發現的。參看应用数学及力学杂志，9, 286(1944)。

个速度比未扰动介質中的音速低得多。活塞得到起初的速度增量 w 时，便从活塞那里产生一个十分微弱的震波，波速为 D，这个 D 与 c_0 之差与 w 同阶大小(参看(2.4)式)。这个波相对于活塞的速度是 $D-w$，因为活塞与波的运动指向相同，波相对于已压縮介質的速度也是这个値。

設活塞再在同一指向加速 w。这时便又有一个弱震波从活塞那里产生，这个弱波相对于已压縮介質的速度是 D_1。这第二个波將追及第一个波，因为第二个波相对于第一个波的速度是 $D_1-(D-w)>w$。故上这个不等号是因为已压縮介質中的音速同未压縮介質中的音速相比較是在增大的，所以 $D_1>D$。兩个波会合之后，就成为一个波推进了，其推进速度大于 D。活塞运动每加速一次(对气体进行压縮时)，必多产生一个弱震波，后生的波与以前产生的一切波合并到一起去。

这样，最后可以得到任意强度的震波，其强度决定于活塞所达到的速度。活塞加速愈快，强震波形成处距离活塞愈近。如果設想活塞在瞬間得到一定的速度 w，那它立刻就产生一道一定波幅的震波，其波幅可按(1.7)公式和雨貢紐絕热关系算出来。

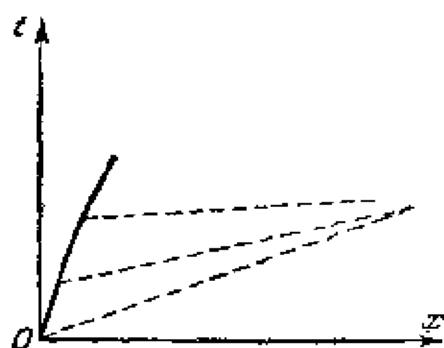


圖 4.

如果在横坐标上画活塞的位移，縱坐标上画时間，則代表活塞加速运动的是一条凹向横軸的曲綫。圖 4 上这条曲綫是由坐标原点画起的，原点代表活塞的初始位置。在这張圖上，速度等于曲綫的切綫与縱軸(即时間軸綫)之間傾角的正切。为了清楚起見，我們設想活塞增速不是連續均匀的，而是分为几次，每次作一定的不大的增加，这样在圖上，活塞的路程就变成了一条折綫。活塞每增加一次速度，便有一道压縮波从活塞發

出去，每道压缩波的推进都用虛綫表示。这些虛綫与縱坐标之間的傾角逐漸增大，因为后来的波是在已被前面的波加速了的介質中推进的。

沿着每一条虛綫各有为活塞的一次对应加速所产生的扰动在推进。在气体动力学里，这种綫称为特性綫。

像圖 4 上那样，特性綫会集到一起去，表示扰动有形成震波的趨势。活塞作"瞬間"加速时，各特性綫的交点十分靠近原点，这时所得到的震波是定型的，即震波在介質中推进时沒有变形。

如果活塞不是对介質进行压縮，而是使介質膨脹，即活塞向左动，那末波的推进便完全是另一种样子了(圖 5)。这时第一个膨脹波，相对于已扰动介質的速度比未扰动介質中的音速大，这是因为扰动的界面在未扰动介質中以速度 c_0 向右推进，而已扰动介質則跟着活塞向左移动。因此，活塞在同一指向再一次加速时，活塞所产生的扰动就不可能追及第一次扰动的界面了。换句話說，隨着活塞的加速，各特性綫与縱軸之間的傾角是愈来愈小了。因此，圖 5 上的各特性綫是不相交的。在最下面一条特性綫之右，介質处在静止狀况，因为最早的扰动都还沒有达到。如果活塞在某一段时間內进行了加速，以后就作等速运动，那就可以作出一条最上面的特性綫来，在这条綫以上，介質是以活塞的速度在作等速运动的。

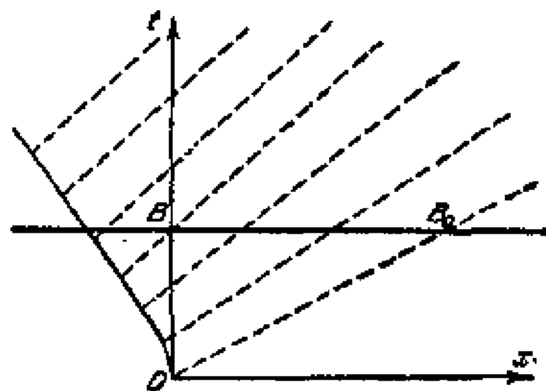


圖 5.

在圖 5 上作一条截綫 BB_0，这条綫代表某一定的瞬时。在 B_0 点之右，介質是靜止的。B 点是截綫与那样一条特性綫的交点，这条綫就是活塞变为等速运动那一瞬間由活塞起引出去的特性綫。

因此 B 点以左介質的速度是常数．在 B 与 B_0 之間，有膨脹波存在。

膨脹波区的右边界相对于未扰动介質是以速度 c_0 在推进的，而左边界相对于未扰动介質的推进速度则小于 c_0。所以膨脹不会成为定型波，膨脹区的厚度是与时間成正比而扩大的。

当活塞向左作瞬間的加速时，各特性綫都从原点出發成扇形，而起始时膨脹波的厚度是零（集中的膨脹波）。左端的波相对于已膨脹介質的推进速度等于該介質中的音速 $c(c<c_0)$。它相对于未扰动介質的速度等于 $c-w$[1]，这个 w 是活塞速度．因此，膨脹波厚度随时間的增大律是 $(c_0-c+w)t$．可見，气体中要形成突躍的膨脹波是不可能的。

只要知道膨脹波中密度的变化，w 就能算出来。按公式(2.2)得

$$w=\int_{\rho_1}^{\rho}\frac{cd\rho}{\rho}, \tag{2.5}$$

因为我們在推演(2.2)式时，沒有說这个等式一定要用于压縮波。在等熵过程，积分号内的各值之間有單值的关系，所以每一点上介質相对于未扰动介質的速度便只决定于：該点上密度变化对未扰动介質的密度值之比。

相当弱的震波，我們前面已經說过，是等熵的．因此，弱震波的一切結果都适用于弱膨脹波。而弱震波的相加应按等熵进行，可用公式(2.5)計算。

現在講几个关于震波的不等式。

我們已經証明了，如果波很弱的話，等熵綫与雨貢紐絕热綫差不多是重合的．在雨貢紐絕热綫的 (p_0, v_0) 和 (p, v) 兩点作兩条切

[1] 原書中誤作 c_0+w——譯者注。

綫。(p_0, v_0) 点的切綫对横軸的斜率等于 $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0$，拿这个值同經 (p_0, v_0)，(p, v) 兩点的割綫的斜率作比較，立刻可看到

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0<\frac{p-p_0}{v_0-v},$$

但 $v_0^2\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0$ 等于未扰动介質中音速的平方 c_0^2，而 $v_0^2\frac{p-p_0}{v_0-v}$ 則等于震波相对于未扰动介質的推进速度的平方 D^2。所以震波相对于未扰动介質是以超音速推进的。在 (p, v) 点，切綫斜率与割綫斜率之間的关系恰相反。$v^2\frac{\partial p}{\partial v}$ 是已压縮气体中的音速平方 c^2，而 $v^2\frac{p-p_0}{v_0-v}$ 則是 $(D-w)^2$，这是震波相对于已压縮气体的速度的平方。可見，震波相对于已压縮气体的推进速度是亞音速的。这样，我們便得到了兩个不等式：

$$c>D-w, \quad c_0<D. \tag{2.6}$$

雨貢紐絕热关系既能完全决定震波，那就可以根据它用下列方法去計算弱震波中的熵变化（略去溫度变化不計）：

$$T_0\Delta S=E-E_0+\int_{v_0}^{v} p\,dv-\frac{(p-p_0)(v_0-v)}{2}+\int_{v_0}^{v} p\,dv. \tag{2.7}$$

$v<v_0$，因而(2.7)式右側的积分是負的。所以，ΔS 是正的，并等于割綫与絕热綫之間的那塊弓形面积除以溫度。又因一小段弧的高度是二阶無穷小，这就証明了，ΔS 是 Δv 或 Δp 的三阶無穷小。总之

$$S>S_0. \tag{2.8}$$

与这个不等式有密切关联的有一种肯定的說法：$v<v_0$，这說法便称为采姆浦蘭(Цемплен)定理。

事实上，不等式(2.8)是必然要由热力学第二定律得出来的，因为受压縮的介質与外界無热交往。而 ΔS 的正号是与 $v<v_0$ 有关联的，因此雨貢紐絕热綫只在 (p_0, v_0) 点以上的一段有意义。只

有压縮震波才可以存在。

我們看到，震波中熵的总变化，可以完全不考虑突躍区中不可逆过程的詳細机構而求出来。

这里可以說一說震波不可逆性的机械度量。如果設想气体可逆等熵地由压强 p_0 变到 p，那末与膨脹波速相类似，震波速度便應該可以表为如下的积分：

$$w' = \int_{\rho_0}^{\rho} c\frac{d\rho}{\rho} = \int_{\rho_0}^{\rho}\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}\frac{d\rho}{\rho} = -\int_{v_0}^{v}\sqrt{-v^2\frac{\partial p}{\partial v}}\frac{dv}{v} =$$

$$= -\int_{v_0}^{v}\sqrt{-dp\,dv} = \int_{p_0}^{p}\sqrt{-\frac{\partial v}{\partial p}}dp;$$

w' 是与震波有同一压强幅度的膨脹波中的介質速度。这个速度与等熵导数 $-\frac{\partial v}{\partial p}$ 的平方根 $\sqrt{-\frac{\partial v}{\partial p}}$ 的平均值成正比。这个 w' 的表达式应与震波的 w 的准确式子

$$w = \sqrt{-(p-p_0)(v-v_0)} = (p-p_0)\sqrt{-\frac{v-v_0}{p-p_0}} =$$

$$= (p-p_0)\sqrt{-\frac{\partial v}{\partial p}}$$

作比較；这里我們用到了差值与导数平均值之間的关系。在 w 的准确公式中，压强是按雨貢紐絕热綫計算的，而在积分式中，則是按等熵綫方程計算的。

在弱震波的情形，雨貢紐絕热綫与等熵綫極接近，等熵綫的比容与压强有單值的关系：$v_i = v_i(p)$。这时，按等熵綫計算的 $v_i(p)$ 值与按雨貢紐絕热綫計算的 $v_i(p)$ 值二者之差是三阶無穷小。

$w - w'$ 这个差值的符号决定于究竟規定哪个值在終了狀况上相重合：如果說商定突躍压縮和等熵压縮使介質达到同一个終了比容值，那末 $w - w' > 0$；而如果商定达到同一个終了压强的話，那

末 $w-w'<0$，这可以用展开成級数的办法来証实。

設介質中有弱震波扫过，把介質由压强 p_0 压縮到压强 p。这时比容由 v_0 变至 $v(p)$。隨着震波之后有膨脹波扫过，又把介質的压强降回到 p_0，只不过变化过程是按等熵綫进行的。由于等熵綫不如雨貢紐絕热綫那样陡急［参看(2.6)式］，所以終了比容有这样一个不等式存在：$v_i(p_0)>v_0$。压强的变化过程画在圖6上。比容的不相等可以作如下的解釋。因为在震波里进行的是不可逆过程，其中必有一部份能量消耗于使介質变热。等到

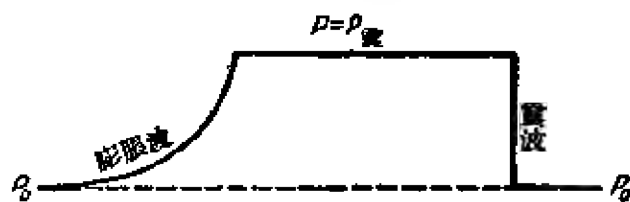


圖 6.

介質回复到原先的压强值时，其比容自应大于原先的比容$\left[\text{这在絕大多数介質說来是成立的，因为}\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p=\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\cdot\frac{T}{c_p}\text{，而}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\text{通常}>0\right]$。現在說的膨脹波在压强变化的幅度上是与震波相等的，因此，介質在膨脹波中所获得的速度 w' 在絕对值上必大于 w。于是，介質中有剩余的动量，其指向与震波相反，介質开始向震波来的那个方向运动。在兩个等压区之間，膨脹后气体的动量和震波内气体的动量，不斷地在兩个相反的指向上增大，当然，总的动量还是守恒的，因为初始压强与終了压强是相等的。

这种剩余运动的动能并不与总能量相平衡，因为动能与速度平方成正比，是六阶無穷小。

§3. 理想气体中的震波

本节我們要研究的是，在比热为常数的理想气体中震波的推进情況。这时雨貢紐絕热綫方程的形式就很簡單了，并可写为显

式。

大家都知道，气体的比热为常数这个假設，只在一定的溫度范圍內才是对的。單原子气体从凝結点起一直到 10000° 左右溫度离子化开始时为止，其比热眞正是常数，等于每模尔 $3/2\,R$（R 是气体常数 8.31×10^{7} 尔格/模尔·度）。

双原子气体只在低溫下，当原子內部迴轉运动还沒有激發起来之前，其比热才是 $3/2\,R$。不过，一切气体除氦以外，在大气压下都能在較高溫度之下凝結。因此，双原子气体实际上在溫度高达激發振动以前，其比热是 $5/2\,R$。氧的这个溫度是 2000°，氮的这个溫度約 3000°，氫約 5000°[1]。

三原子气体如果分子是直綫排列的，那末它由移动运动和迴轉运动而来的比热，同双原子气体一样也是 $5/2\,R$。三角排列的分子，由移动和迴轉而来的比热是 $3R$，因为三角排列的分子具有三个迴轉自由度，每一自由度的比热是 $1/2\,R$。

所以，設气体在震波中比热不变，意思就是說假定溫度突躍不超过比热为常数的范圍。記 c_p 与 c_v 之比为 k，$\frac{c_p}{c_v}=k$。于是單原子气体的 $k=5/3$，双原子气体的 $k=7/5$，三原子直綫排列气体的 $k=7/5$，三角排列气体的 $k=4/3$。以上都假定振动沒有激發起来。这样，气体的能量便等于

$$E=\frac{1}{k-1}pv, \tag{3.1}$$

焓等于

$$H=\frac{k}{k-1}pv. \tag{3.2}$$

把(3.1)代入(1.9)，并通过 v_0 来表示 v。經極簡單的演化后，得等式

$$v=\frac{(k-1)p+(k+1)p_0}{(k+1)p+(k-1)p_0}v_0. \tag{3.3}$$

---

[1] 例如，到 2000° 时，氫的比热等于 $6.23\frac{R}{2}$，氮等于 $6.5\frac{R}{2}$，氧等于 $7.0\frac{R}{2}$。

如果先講弱波，即假定 $p-p_0 \ll p_0$，像§2中那样，那末比容的变化用压强变化来表示时便成为

$$\frac{v_0-v}{v_0}=k\frac{p-p_0}{p_0}.$$

这个式子相当于比容对压强的等熵关系，因为比热为常数的理想气体的等熵方程是 $p_0v_0^k=pv^k$。

震波十分强烈时，$p \gg p_0$，从方程(3.3)得到特别值得注意的結果。这时，如略去(3.3)式中的 p_0，即得極强烈的震波的極限律：

$$v=\frac{k-1}{k+1}v_0. \tag{3.4}$$

換句話說，隨便怎么强的震波也不能把气体的密度压縮到 $\frac{k+1}{k-1}$ 倍以上。例如，單原子气体的極限压縮密度是4倍，双原子是6倍，三原子非直列气体是7倍(振动沒有激發)。

在这一点上，雨貢紐絕热綫与等熵綫之間的差別是特別厉害的。事实上，在等熵綫上压强在 $v=0$ 时应变为無限大，而在雨貢紐絕热綫上则到 $v=\frac{k-1}{k+1}v_0$ 时，卽有限压縮时，压强已經就变为無限大了。确实，就曲綫的高压部分說，卽就 $p>p_0$ 那部分来說，等熵綫是在雨貢紐絕热綫之下的。

在§1里我們已經指出过了，突躍压縮与等熵压縮不同的特征在于，經几步突躍压縮而得的比容要看那几步压縮的进行順序如何，还要看总的压强变化在各步压縮上是怎样分配的；而作等熵压縮时，終了比容则只决定于总的压强变化。这一区别最好用理想气体为例加以說明。

假定終了压强 p 十分高。假定用一道震波，那我們就把气体密度压到了 $\frac{k+1}{k-1}$ 倍。但如果分兩步压縮，每一步压为 $\frac{k+1}{k-1}$ 倍，結果就压为 $\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2$ 倍。要做到这一点，只要，譬如，每步波中压强增

为$\sqrt{\dfrac{p}{p_0}}$，而这个比值还是足够大就行了。

现在再为理想气体中极强震波的極限情形，推演另一些关系式。

(1.6)式中的 p_0 与 p 相比应略去，其分母則用 $v=\dfrac{k-1}{k+1}v_0$ 代进去。对方程(1.7)也应做同样的改变。这样，波速和介質速度的極限公式便成为：

$$D^2=\frac{k+1}{2}pv_0, \tag{3.5}$$

$$w^2=\frac{2}{k+1}pv_0. \tag{3.6}$$

这兩个公式还可以与已压縮气体中的音速 $c^2=kpv$ 作一个比較，这个 c^2 用初始比容来表示时便是

$$c^2=k\frac{k-1}{k+1}pv_0. \tag{3.7}$$

这里要再着重提一句，(3.5)至(3.7)各公式只适用于强震波。

不难看到，由这几个关系式也能得到我們在§2中所得到过的那些适用于弱波的不等式。从$\dfrac{p}{p_0}\geqslant 1$就已經可以看出 $D>c_0$。至于(1.6)的另一个不等式，只要考虑到 $k>1$，并將(3.5)—(3.7)各等式的系数經一些簡單演化也就可得到了。

在下面的表1里，我們比較了 D^2, w^2, c^2 各極限值，都以 pv_0 为單位，也比較了在均一分布律之下理想气体的$\dfrac{c}{D}$和$\dfrac{w}{D}$这兩个比值。

表 1.

	D^2	w^2	c^2	$\dfrac{c}{D}$	$\dfrac{w}{D}$
單原子气体……………………	4/3	3/4	5/12	0.56	3/4
双原子气体……………………	6/5	5/6	7/30	0.45	5/6
三原子气体……………………	7/6	6/7	4/21	0.41	6/7

現在講一講已知气体密度的变化之后，溫度升到多高。由(3.3)式得压强变化比

$$\frac{p}{p_0}=\frac{(k+1)v_0-(k-1)v}{(k+1)v-(k-1)v_0}, \tag{3.8}$$

由是

$$\frac{T}{T_0}=\frac{pv}{p_0v_0}=\frac{k+1-\frac{v}{v_0}(k-1)}{k+1-\frac{v_0}{v}(k-1)}. \tag{3.9}$$

到了極限，卽 $v=\frac{k-1}{k+1}v_0$ 时，溫度升高到 $\frac{k-1}{k+1}\frac{p}{p_0}$ 倍，而在等熵压縮时，如所周知，溫度比等于

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)_{\text{等熵}}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

这就上升得較慢了。

例如，当 $\frac{p}{p_0}=100$ 时，在双原子气体 $\left(\frac{T}{T_0}\right)_{\text{激波}}=16.6$，$\left(\frac{T}{T_0}\right)_{\text{等熵}}=3.72$。而当 $\frac{p}{p_0}=10000$ 时，$k=7/5$ 的話，$\left(\frac{T}{T_0}\right)_{\text{激波}}=1660$，而 $\left(\frac{T}{T_0}\right)_{\text{等熵}}=13.9$（这只作为数字举例說一說而已，因为双原子气体在常数比热下溫度不应升达1660倍）。

突躍压縮的溫度之所以比等熵压縮高得多，就是因为溫度是与 pv 成正比的緣故。在突躍压縮时，p 增大上去了，而 v 依然是有限値；在等熵压縮时，v 則随 p 增大而趋于零，虽然 v 的減小比 p 的增大慢一些。

§4. 平面一元問題

我們来介紹某些很簡單然而極重要的情况的气体动力学方程。本节先講气体的一元平面运动，这是这样的一种运动，在 $x=$ 常数的平面上，运动的一切量都只是同一个値，給定坐标 x 之

后，这一切量只随时間而变。这时，速度的指向是 x 方向，于是 $w_x=w=w(x,t)$， $p=p(x,t)$，$\rho=\rho(x,t)$, $w_y=0$, $w_z=0$。在§7 里我們將推演中心对称問題的各方程。

在气体动力学中，总导数与偏导数之間的区別是要着重指出的。时間的偏导数是指在固定的坐标值(在固定坐标系上即所謂欧拉坐标系上，度量的坐标值)之下对时間微分。总导数是就某一塊給定的基元介質而言的，它是指这塊基元介質在空間以速度 $w=\dfrac{dx}{dt}$ 移动时某种物理量的变化率。因此，总导数有时又叫作实导数，意思是說和实物有关联的。設 $f(x,t)$是坐标和时間的某种函数，則其实导数便是：

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+w\frac{\partial f}{\partial x}.$$

用实导数可以写出某塊基元介質的質量守恒律来，这介質限于作一元平面运动；在本节里我們限于談一元的运动。这时一塊基元介質的質量与 $\rho\delta x$ 成正比，这个 ρ 是密度。显然，質量的总导数

$$\frac{d}{dt}\rho\delta x=\delta x\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{d\delta x}{dt}=\delta x\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+w\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\rho\frac{d\delta x}{dt}$$

应等于零。

現在把导数 $\dfrac{d\delta x}{dt}$ 演化一下。δx 这个值代表兩相鄰点的坐标之差。而差的导数是等于导数的差的，所以 $\dfrac{d\delta x}{dt}=\delta\dfrac{dx}{dt}=\delta w$。再說，$\delta w$ 指的是某一定的瞬間上兩質点的速度差，这就不是什么別的，正是速度对 x 的导数，乘以坐标差 δx。所以 $\dfrac{d\delta x}{dt}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\delta x$。把 δx 消去，即得：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho w)=0.$$

这个方程也可以用別种推理来得。我們可以从流量的定义出發。流經單位面积的質量，大家都知道，是等于 ρw 的。用相距 dx 的兩

个固定平面划出一块基元容积来。从右边經單位面积进入这块容积的質量是 $\rho(x)w(x)$，而从左边出去的質量是 $\rho(x+dx)\times w(x+dx)$。这兩个流量之差应等于这块容积中單位面积上的質量变化。質量的变化等于 $\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x$。这里用的是密度对时間的偏导数，因为划定的容积并不与某些流体微团連在一起，而是处于兩个固定平面 x 及 $x+dx$ 之間的。

把 ρw 展开为 dx 的級数，并只保留級数的第一項，仍得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho w)=0.$$

現在来算一下作用在厚度为 δx 这样一層介質上的作用力。δx 是極接近的兩塊介質微团之間的距离。作用在單位面积上的力等于兩边的压强差，$-p(x+\delta x)+p(x)$。把这个式子展为 δx 的級数，且只保留一次項：

$$-p(x+\delta x)+p(x)=-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x.$$

用实导数很容易写出 δx 厚度中質量的牛頓第二定律。

δx 厚那層質量的动量的总导数，应等于作用在該層上的力：

$$\frac{d}{dt}(\rho w\delta x)=-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x.$$

而按質量守恒律，$\frac{d}{dt}(\rho\delta x)=0$，所以

$$\rho\frac{dw}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}.$$

如果再通过偏导数来表示总导数 $\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x}$，那末与質量守恒方程一起，便有了一組兩个偏微分方程：

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+w\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial w}{\partial x}=0. \tag{4.2}$$

这个方程組称为欧拉方程組。方程(4.1)用别的方法，从动量的流动上考虑，也很容易推得。方程(4.2)称为連續方程。

(4.1)—(4.2)这个方程組并不够用，因为兩个方程連結了三个函数 w, p, ρ。要得第三个方程，就得对介質中的能量傳遞作某种假定了。除了流动介質帶有的能流和在連續介質中压强所做的功之外，一般地說来，还可能有通过热傳导而来的能量。現在我們假定，介質的运动进行得如此迅速，以致热的傳导可以略去不計。

若略去热交換，則給定的一塊基元介質的总能量（包括热能，化学能，动能）的总导数便应等于

$$\frac{d(\delta\varepsilon)}{dt}=-p(x+\delta x)w(x+\delta x)+p(x)w(x),$$

式中的 $\delta\varepsilon$ 是这塊基元介質的能量，上式的右側代表單位时間內其他基元介質的压力对这塊基元介質所做的总功。在我們的假設之下，唯一能傳遞能量的方法就是一層气体对另一層气体做功

$\delta\varepsilon$ 可以写成 $\rho\left(E+\frac{w^2}{2}+\beta Q\right)\delta x$，这里的 β 是能起化学反应的物質的濃度，Q 是單位起反应物質所放出的能量，这样 $\rho\beta Q\delta x$ 便是能够放出来的化学能量的儲量。

式子右側的功应展为級数，并限于取到 δx 的一次項，这样便得 $-\delta x\frac{\partial}{\partial x}(pw)$。因为 $\rho\delta x$ 这个値是常数（对化学能那項进行微分时，曾用到这一点），等式左側，即 $\frac{d\delta\varepsilon}{dt}$，就可以写成

$$\delta x\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(E+\frac{w^2}{2}\right)+\delta xw\frac{\partial}{\partial x}\rho\left(E+\frac{w^2}{2}\right)+$$
$$+\rho\left(E+\frac{w^2}{2}\right)\frac{d\delta x}{dt}+\rho\delta x\,Q\frac{d\beta}{dt}.$$

用到 $\frac{d\delta x}{dt}=\delta w$ 的关系，消去 δx，并將 $\frac{\delta w}{\delta x}$ 改为 $\frac{\partial w}{\partial x}$，再經簡單归并，便得能量守恒律的方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(E+\frac{w^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho w\left(E+\frac{p}{\rho}+\frac{w^2}{2}\right)\right]=-\rho Q\frac{d\beta}{dt}. \quad (4.3)$$

連这个方程也可以从流动的看法去推导出来。兩固定平面之間的气体層中能量的变化，除化学能外，就是由于进出的能流[1]

$$\rho w\left(E+\frac{p}{\rho}+\frac{w^2}{2}\right)=\rho w\left(H+\frac{w^2}{2}\right)$$

有差別的緣故。为了使方程組完全起見，除已得到的三个方程外，还需要加上一个化学动力学的方程：

$$\frac{d\beta}{dt}=f(\beta, p, \rho). \quad (4.4)$$

現在(4.1)至(4.4)这个方程組是完全了。方程(4.3)在形式上是繁了一点。如果物系中沒有不可逆的化学反应發生，即如果$\frac{d\beta}{dt}=0$，那末这个方程就簡單多了。那时能量守恒律可以写成下列的形式：

$$\rho\left(\frac{dE}{dt}+\frac{d}{dt}\frac{w^2}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}(pw).$$

速度的总导数应按牛頓第二定律用$-\frac{\partial p}{\partial x}$来表示。还有，能量的微分可以另写为$dE=TdS-pdv$。利用$v=\frac{1}{\rho}$，并归并同类項，再利用連續方程(4.2)，便得一塊基元介質在运动时的等熵条件

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+w\frac{\partial S}{\partial x}=0. \quad (4.5)$$

这里，熵認作是p和v的已知函数。

这样，(4.3)就簡單地变成了等熵方程。如果有一种情况，起初在整个容积里熵到处都是同一常数，那末不論到什么时候熵还是到处为同一常数，因为按(4.5)式看，熵的初始値，在运动中应保持不变。換句話說，

$$S(p, v)=\text{常数}, \quad (4.6)$$

① 参看(1.8)式。

这在理想气体就变成

$$p\rho^{-k}=\text{常数}。 \tag{4.7}$$

这样,方程(4.7)便是(4.1)—(4.2)方程組的补充了。

在本章里,我們只討論 $\frac{dS}{dt}=0$ 的問題。在化学变化中放出热能的情形,归在爆震和燃燒理論里面。

震波的形成可以使熵变化,我們知道,震波中熵永远是增加的。但震波是不能用气体动力学的微分方程来描写的,它得用有限形式的关系式来描写。

(4.1)式如果用 ρ 除一下,右侧便是 $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$,这个式子在等熵之下可以写成 $-\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$,因为在等熵过程中,压强与比容有單值的关系。而按(2.1)式,$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$ 等于介質中給定点微弱扰动的傳播速度的平方。这个速度又称为当地音速。下节里我們將用气体动力学方程証明,这个 $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$ 确是当地音速的平方。

§5. 特性綫

現在把(4.1)至(4.2)的方程組改一下形式,使另成为两个一阶的新方程,其中对 x 和 t 的导数里各是同一个量。以 c^2 代 $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$,并以未定系数 n 通乘(4.2)式,然后把两个方程加起来,得:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+n\frac{\partial \rho}{\partial t}+(w+n\rho)\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\frac{c^2}{\rho}+nw\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}=0.$$

为了把这个方程改成我們所要的形式,应使对 x 和对 t 的导数成为复合的形狀 $\frac{\partial w}{\partial x}+n\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial t}+n\frac{\partial \rho}{\partial t}$,而要做到这一点只要使 n 滿足下列的条件就行了:

$$\frac{\frac{c^2}{\rho}+nw}{w+n\rho}=n,$$

由此得
$$n=\pm\frac{c}{\rho}, \tag{5.1}$$

把这兩个 n 值代入兩个微分方程，就使之成为

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}+(w+c)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}+(w-c)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)=0.$$

現在引用一个函数：

$$u\equiv\int\frac{c d\rho}{\rho}, \tag{5.2}$$

这个 u 与压强有單值的关系，因为熵是常数。用了 u，这个气体动力学方程組就变成很整齐的对称形式了：

$$\frac{\partial}{\partial t}(w+u)+(w+c)\frac{\partial}{\partial x}(w+u)=0, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w-u)+(w-c)\frac{\partial}{\partial x}(w-u)=0. \tag{5.4}$$

在很多場合，(5.3)—(5.4)这个方程組比原来的(4.1)—(4.2)方程組有相当多的优点。这个方程組描写的是兩个量的推进：量 $J_+\equiv w+u$ 以瞬时速度 $w+c$ 在推进，而量 $J_-\equiv w-u$ 則以速度 $w-c$ 在推进。某一个量 J_+ 在空間的推进速度我們称为点的移动速度，在这点，J_+ 保持为給定的常数值。这个速度是根据这样一个条件決定的：$\frac{dJ_+}{dt}=\frac{\partial J_+}{\partial t}+\frac{\partial J_+}{\partial x}\frac{dx}{dt}=0$，或

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\frac{\partial J_+}{\partial t}}{\frac{\partial J_+}{\partial x}}.$$

如果 J_+ 这个量是滿足方程(5.3)的，那末上式右側这兩个导数之比就应等于 $-(w+c)$。因此，量 J_+ 的定值在空間的推进速度是$(w+c)$：

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{J_+}=w+c. \tag{5.5}$$

同理，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{J_-}=w-c. \tag{5.6}$$

$w+c$ 和 $w-c$ 这两个量可以很簡單地看作是运动介質中的音波傳播速度。如果介質以速度 w 向右移动，那末 $w+c$ 便是介質中向右推进的音波速度，这是靜止观察者所量得的速度；对应地，$w-c$ 即是向左推进的音波速度。

設在初始瞬間，給定 w 和 c 这两个量在空間的分布：$w=$ $=w(0,x)$，$c=c(0,x)$。因为按(5.2)式，u 的值是为 c 所精确規定的，頂多只差一常数，所以我們可以說也給定了 $u=u(0,x)$。于是，可以作出两条曲綫来：$J_+(0,x)=w(0,x)+u(0,x)$，和 $J_-(0,x)=$ $=w(0,x)-u(0,x)$。而据(5.5)和(5.6)两式可見，由这两条曲綫立刻可以作出 $J_+(\tau,x)$，$J_-(\tau,x)$ 这样的曲綫来，这里的 τ 是微小的时間間隔。为此，只要使初始曲綫上的每一点各移动自己的 $(w\pm c)\tau$ 值就行了。用这个方法就可以按 $w(0,x)$，$c(0,x)$ 各值求出 $w(\tau,x)$，$c(\tau,x)$ 各值，然后再用同一个法子求出新的 $J_+(2\tau,x)$，$J_-(2\tau,x)$，余类推。

当介質的移动速度比音速小得多的时候，即 $w\ll c$ 时，用这种推算法特別簡單。这时就可以認为任何一个值的推进速度都是常数，且等于 c。这就証实了 c 的定义就是音速，而且(5.3)說的是向右推进的波，而(5.4)是向左推进的波。任何一个值都可以移动一定的長度 ct。

(5.3)，(5.4)两方程在 (x,t) 面上成为两族曲綫，沿这些曲綫，$J_+=w+u$，$J_-=w-u$ 这两个函数分别保持为常数值。这种曲綫上各点的斜率等于与各該曲綫相对应的 J_+，J_- 量的推进速度。这就是在§2里我們称为特性綫的那些曲綫。如果特性綫是直綫，像圖 4，5 上那样，那末与之相对应的气体狀况便以定值速度 $w\pm c$ 在

推进。

假設其中一个函数，例如 J_-是常数，$J_-=$常数。現在要証明，变量 J_+ 的推进对 J_- 沒有任何影响。

事实上，当 $J_-=$常数时，方程(5.4)是个恒等式，总是可满足的；也就是說，只要在初始瞬間 J_- 是常数，那它以后便永远保持为常数。再有，$w=J_-+u$, $w=J_+-u$, 方程(5.3)可以变成

$$\frac{\partial J_+}{\partial t}+\left(c+\frac{J_++J_-}{2}\right)\frac{\partial J_+}{\partial x}=0.$$

音速 c 与 u 有單値的关系，这是方程 (5.2) 所表明的。因为 $u=\frac{1}{2}(J_++J_-)$, J_+ 的方程便可写为

$$\frac{\partial J_+}{\partial t}+f(J_+)\frac{\partial J_+}{\partial x}=0.$$

$f(J_+)$的意义是很明显的：它就是 $w+c$, 不过是用未知变量 J_+ 和給定的常数値 J_- 表示的而已。据 J_+ 的方程可知，有某个量 J_+ 在用速度

$$\frac{dx}{dt}=f(J_+) \tag{5.7}$$

推进。这样我們已經推得特性綫方程了。这个关系可以簡單地积分出来：

$$x-f(J_+)t=\varphi(J_+). \tag{5.8}$$

式中的 φ 是个任意函数，决定于初始条件。

如果求出了这个函数那就可以由(5.8)方程解 J_+，把 J_+ 表为 x 和 t 的函数。然后再算出 w 和 u (或压强)来，也都表为 x 和 t 的函数。

这样我們就証明了，气体动力学方程是允許去解只向一个方向推进的波的。尽管方程不是綫性的，只要向右推进的波在起初不激动向左推进的波，那向右推进的波便一直不会激动向左推进的波，否則，如果右推波起初激动了左推波，那当然，兩个波是要彼

此影响的，后面举例作 J_+, J_- 两函数的圖綫时，就說到这种情形(参看后面的圖 7)。

J_+, J_- 的值对推进速度 $w+c$ 和 $w-c$ 直接有影响，而对于 p, ρ, w, u, c, 等函数却只有通过速度才有影响。

現在把 (5.3)(5.4) 方程組写成理想气体的方程組。这时函数 u 得下列的方程：

$$u=\int c\frac{d\rho}{\rho}=\int c d\ln\rho=\int c d\ln c^{\frac{2}{k-1}}=\frac{2}{k-1}c, \tag{5.9}$$

积分常数沒有什么关系，因为 u 在方程中只出現在微分号之內。双原子气体的 $u=5c$。

現在由于 u 与 c 之間的关系是綫性关系，于是 J_+, J_- 的圖綫作起来也比較簡單一些了。当 $k={}^7/_5$ 时，用 J_+, J_- 表示的推进速度式子是 $w+c=0.6J_++0.4J_-$, $w-c=0.4J_++0.6J_-$, 这样，(5.3)—(5.4)方程組中便可以沒有 w 和 c 存在了。

在气体中可以产生只向一个方向推进的扰动，例如使 J_- 为常数，J_+ 为变数，其方法是不难找到的。假定在一根光滑管子里盛有某种气体，管子兩端有兩个封口的活塞。左端的活塞位于全部气体之左。于是由这个活塞所产生的扰动，使只能以相对于介質的速度 c 向右推进。这一点，不論左活塞怎么动法，是由左向右动，还是由右向左动，总是对的。由活塞出来的特性綫，其方程总是

$$\frac{dx}{dt}=w+c.$$

前面已經証明过，只要 J_- 起始时是常数，J_+ 的变数性質并不会惹动 J_-。由左端活塞出發的 J_+ 特性綫不会激动 J_- 特性綫。同理，單單右端活塞的运动也只激动 J_- 特性綫，而到处的 $J_+=$ 常数。

現在假定在气体中放置一个小小的測压計，这是一种平板式

的测压計,只能感受一个方向的压强。为了明确起見,假定只是左端活塞运动,并只产生 J_+ 波,即 J_- 到处是常数。把测压計轉到对准左活塞,使它的感受面恰与波头平行。等到波击中测压計的一瞬間,J_- 特性綫还来不及受激动:刚刚在压强計上反射之后特性綫上的 J_+ 値应和反射瞬間的数值一样。但因感受器上气体速度必須等于零,于是得

$$J_+ = w + u(p) = u(p_1).$$

式中的 w 和 p 是反射前的速度和压强,p_1 是反射后的压强。p_1 就是测压計所記录的压强。如果把测压計放得和管壁平行,那它所記录的便是 p; 如果把测压計的感受面轉到向右,那它便不会反映波的到来,在波沒有超越它以前,它的讀数一直是 p_0,即初始压强。

用兩个活塞做实驗时,曾假定活塞不向气体内部作瞬間的加速度。只有这样,紧貼活塞处才不致产生震波,这样才会有(5.3)(5.4)方程組合用的区域存在。

我們已經証明过了,如果起初 $J_- = 0$,那末 J_+ 推进时并不改变 J_-。如果有了震波,那末(5.3)—(5.4)方程組就不能用了:在震波中熵有变化,w, c 兩函数都有突躍。所以,如果有震波向右推进,那末 J_- 为常数这个結論就不能严格存在了。

震波弱到極限,波幅十分微小时,一切等熵方程的結果就都能用了,它們各有一定的精确度:例如,熵的变化只是压强突躍相对値的三阶無穷小。事实上我們發現,即使在一定强度的震波里,只要波幅不太大,那些严格說来只适用于声波的近似关系,还是可以用的,精确度也还很高。

大家都知道,这些关系計有:

(1) $S =$ 常数(等熵),

(2) $\Delta w = \dfrac{2}{k-1}\Delta c$[按(5.9)看,这等于說 $J_- =$ 常数]。这第二

个条件只要將公式(2.2)用于理想气体就得到了。事实上，在等熵时，理想气体中的音速 c 与 $\rho^{\frac{k-1}{2}}$ 成正比，这是因为等熵过程中的压强与密度的关系是个 ρ^k 律，而音速等于 $\sqrt{k\frac{p}{\rho}}$。而当 ρ 变化很微小时，$\frac{\Delta c}{c_0}=\frac{k-1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$，$w=\frac{c_0}{\rho_0}\Delta\rho$。

(1)(2)兩条具有这样的一些意义。試設想活塞作柔和的运动以压縮气体。在柔和的压縮下，紧貼活塞处所形成的就是非突躍的压縮波，由于这些压縮波都是等熵的，它們必能严格地滿足(5.3)—(5.4)方程組，因而能滿足(1)(2)兩条的关系。

这种波是不会产生相反的波的。但按§2中所說的，离活塞一定距离之后，由于特性綫集中起来的緣故，这种柔和的波会形成一道震波(参看圖4)。这时(1)(2)兩条严格地說来就不成立了，而且要产生一些相反的膨脹波。不过我們可以肯定說，这些相反的波是極微弱的，也就是說，即使在一定波幅的震波里，(1)(2)兩条仍是能很好地滿足的。

这一点可以用个数值例子加以說明，設 $p=2.5p_0$，$k=7/5$(双原子气体)。我們来按精确的震波理論，即雨貢紐絕热綫算一算气体的速度，再按(1)(2)兩条关系算一算。先按精确的計算。

經波压縮后的比容，按公式(3.3)是

$$v=v_0\frac{2.5\times0.4+2.4}{2.4\times2.5+0.4}=0.532v_0.$$

据此，按方程(1.5)便很容易求出气体速度来：

$$w=\sqrt{1.5p_0\times0.468v_0}=0.838\sqrt{p_0v_0}.$$

現在檢驗一下，按(2)計算出来的速度 w 是否与按雨貢紐絕热綫求出来的准确值很吻合。(1)(2)兩条应同时滿足，所以音速应按等熵綫求

$$\frac{c}{c_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{k-1}{2}}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}=2.5^{\frac{1}{7}}=1.140.$$

而起初的音速表为未压縮气体的比容和压强时是

$$c_0=\sqrt{1.4p_0v_0}=1.182\sqrt{p_0v_0},$$

于是按第(2)条关系，得速度

$$w=\frac{2}{k-1}c_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}-1\right]=$$

$$=5\times1.182\sqrt{p_0v_0}\times0.140=0.827\sqrt{p_0v_0}.$$

可見，按近似公式算出来的速度与眞实速度之差，比按压强波幅所推料的小得多。因此，$J_-=w-5c=w-u$ 这个値，[式中的 u 是按(5.9)式計算的]在压强变化为 $p=2.5p_0$ 的震波里，其变化确实是很小的，这就是(1)(2)兩近似关系式的意义。

另一个关系式的精确度比較差一些，我們在§2里推出过的弱震波的

$$D=\frac{c+c_0+w}{2}.$$

現在，D 的精确値是 $D=1.789\sqrt{p_0v_0}$①，而近似値是 $D=1.679\times\times\sqrt{p_0v_0}$①；即使在这个数値上，相对誤差也比 $\left(\frac{w}{c}\right)^2=0.38$ 小得多。

这里所說的近似称为准音波运动②。許多問題用这种近似解法可以大大地省事。

例如我們来看这样一个問題。有兩部分双原子气体，一部分压强是 p_0，另一部分压强是 p，$p>p_0$，二者溫度相同，中間有一塊隔板分开。間隔板除去后，原分界处的气体將以什么速度运动。

① 原書中無 $\sqrt{p_0v_0}$，恐系漏印——譯者注。

② 斯坦紐科維奇(К. П. Станюкович)著："气体的非定常运动理論"，第82頁，新技术局出版，莫斯科，1948。

在压强較低的那部分气体里产生震波，在压强高的那部分气体里产生膨脹波。接界处兩部分气体的压强和速度当然是彼此相等的。

因为溫度起初到处相同，隔板兩边的初始音速是相等的，記这个初始音速为 c_0。隔板除去后，原来压强較低的气体，其音速必增大，按第(2)条，$c_1=c_0+\frac{k-1}{2}w$。其所以应該增大，是因为震波压热了气体。而原来压强較高的气体，其音速則等于 $c_2=c_0-\frac{k-1}{2}w$。

我們用柔和的压縮波代替震波，計算便可大大地簡化，柔和压縮波与震波具有同一速度，因此我們把它看作是与膨脹波相对称的。这里要提一句，在这样的近似处理下，兩边的气体所进行的都是等熵过程，于是

$$p_0 c_0^{-\frac{2k}{k-1}}=p_1 c_1^{-\frac{2k}{k-1}},\qquad p c_0^{-\frac{2k}{k-1}}=p_2 c_2^{-\frac{2k}{k-1}}.$$

把 c_1 和 c_2 兩式代进去，得

$$p_1=p_0\left(1+\frac{k-1}{2}\frac{w}{c_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}},\qquad p_2=p\left(1-\frac{k-1}{2}\frac{w}{c_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}}.$$

由 p_1 的公式算出来的是作用在以速度 w 压縮气体的活塞上的压强，而由 p_2 的公式則是作用在以速度 w 运动而使气体膨脹的活塞上的压强。

这时，也同一般的气体动力学問題一样，作用在活塞上的压强并不决定于活塞的位置，而决定于活塞的速度，这一点只要在波还沒有从对面反射回到活塞上来以前总是对的。(作靜态压縮时，假定活塞的运动十分緩慢，慢到可以認为反射波是立刻就回来的，于是作用在活塞上的压强便只决定于活塞的位置了。)

我們所感兴趣的速度，如上述只要使兩个压强相等：$p_1=p_2$，就得到了。开去方次，得

$$1-\frac{k-1}{2}\frac{w}{c_0}=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\left(1+\frac{k-1}{2}\frac{w}{c_0}\right).$$

于是 w 可得自一个简單的一次方程:

$$w=5c_0\frac{1.14-1}{1.14+1}=0.385\sqrt{p_0v_0},$$

这里我們代入的各項数字都是 $p=2.5p_0$ 这种情况下的数字。这个問題的精确 w 値是 $w=0.386\sqrt{p_0v_0}$。

§6. k=3 的情形

如果可以假定 $k=3$ 的話，那末作圖就特別簡單了。到后面我們会看到，濃集的爆炸物在爆炸后的产物，其 k 値就接近于 3。当 $k=3$ 时，$\frac{2}{k-1}=1$，$u=c$，方程組 (5.3)—(5.4) 中的未知量便完全分开了:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w+c)+(w+c)\frac{\partial}{\partial x}(w+c)=0, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w-c)+(w-c)\frac{\partial}{\partial x}(w-c)=0. \tag{6.2}$$

这一方程組最先是斯坦紐柯維奇得到的。

在这种物系里，$J_+=w+c$ 波的推进便完全与 $J_-=w-c$ 波沒有关系了，無論这些波是什么样的。

我們看到，$J_+=w+c$ 的特性綫就是代表推进速度 $w+c$ 的。因此，沿特性綫 J_+ 任何給定値都保持不变，J_+ 以定速推进，这个速度在 $t+dt$ 时間在 t 时完全一样。关于 J_- 値和它的推进速度也可作类似的結論。在定速下，移动与时間成正比，因此，知道了初始时的 $w+c$ 及 $w-c$ 値之后，我們就可以作出任一瞬間的这兩个値，以初始的 $w+c$ 及 $w-c$ 曲綫为依据，把曲綫上的每一点各与其縱坐标成比例作移动就得了。

这里要指出，現在密度 ρ 与 c 成正比（$c\sim\rho^{\frac{k-1}{2}}$），而压强与 c^3 成正比。因此，如果知道 c 的分布，我們也就可以知道压强的分布了。

現在用上述的这些結論来解决下列的問题。設在初始瞬間 $t=0$ 时，气体具有均一的密度 ρ，在長度为 $2a$ 的一段空間內处于静止狀况。把 x 軸的原点放在这一段長度的中点上。初始的 c、w，$w+c$ 及 $w-c$ 各量的分布如圖 7a, $б$ 及 $в$ 所示。我們利用 c 与 ρ 成正比的关系。压强分布圖可以在下述的条件下作出来：已压縮气体封在一根很長的管子中段，当兩边的門板突然除去时，气体只在管子里膨脹，不飞逸到管外空間去。也可以假定管內封有某种爆炸物，这爆炸物在瞬間爆炸时变成同体积的气体。

我們把 $w+c$ 和 $w-c$ 的端头綫画成粗实綫，曲綫的水平段也画成粗实綫。这样就可以消除爆炸点的不定性。这个做法是極自然的，因为我們总可以設想鉛直綫段是斜率極大的一条直綫。現在来研究一下，經过时間 t 后（t 小于$\frac{a}{c}$），各个量的分布情况如何。經过这样一段时間，气体兩自由端头所产生的扰动还来不及相遇。按証明，$w+c$ 和 $w-c$ 的分布可用曲綫表示，曲綫各点的横坐标分别由原曲綫的横坐标移动 $(w+c)t$ 及 $(w-c)t$（圖 7, $г$）而成。在这張圖上，$w+c$ 是折綫 ABA'，而 $w-c$ 則是折綫 $AB'A'$。

速度 w 的分布是平行四边形上下边 ABA' 和 $AB'A'$ 的縱坐标的平均值（圖 7, $д$）。c 値的分布得自縱坐标之差（圖 7, e）。因压强与 c^3 成正比，所以压强分布很容易按圖 7, e 算出来。压强分布画在圖 7, $ж$ 上。a 点的縱坐标是$\frac{c}{2}$，所代表的压强等于未扰动区压强的八分之一。

在 $a-ct$ 与 $a+ct$ 之間，还有在 $-(a+ct)$ 与 $-(a-ct)$ 之間，是膨脹波区。在 $a-ct$ 与 $-(a-ct)$ 之間，是原来的介質，由兩端起的

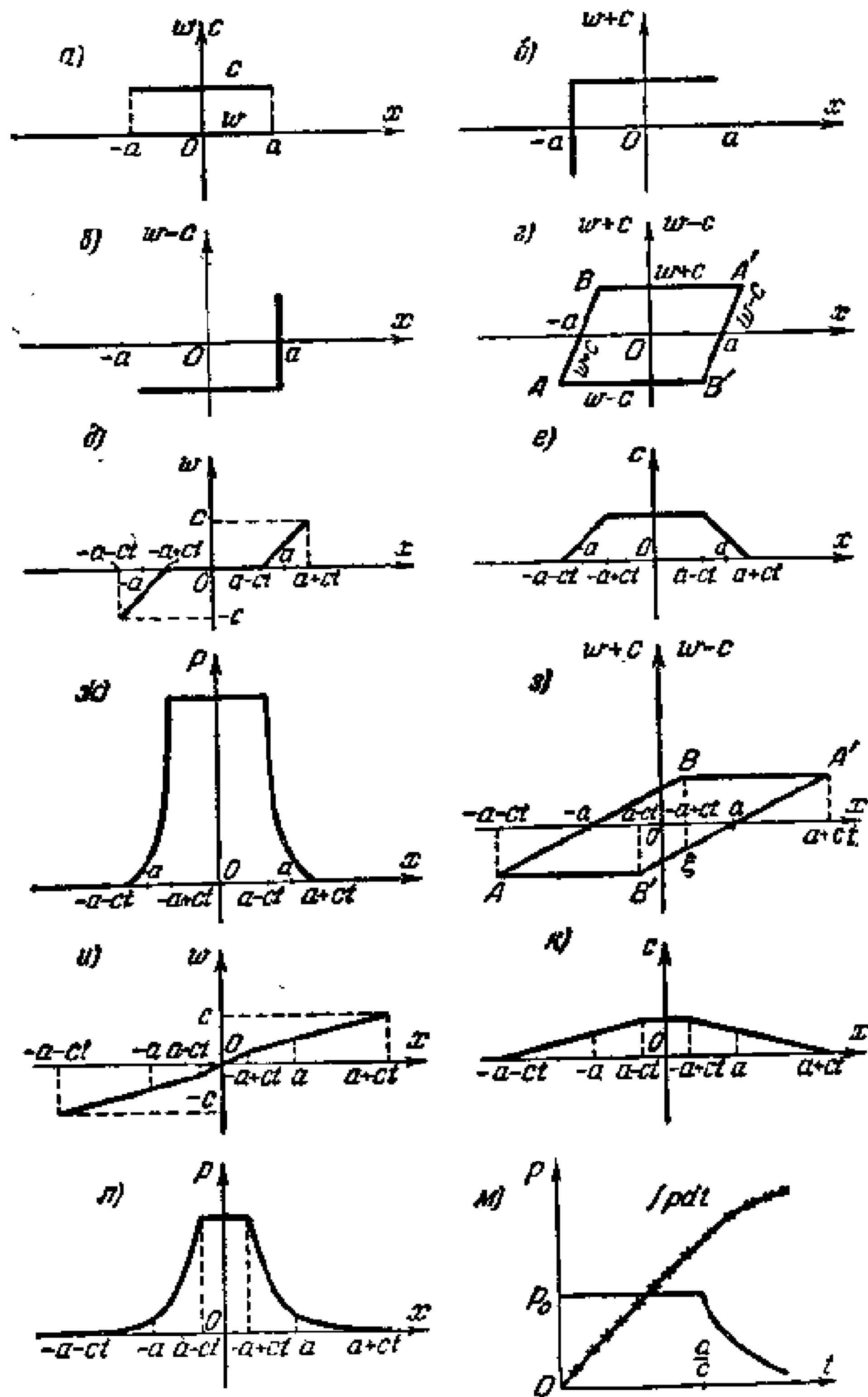


圖 7.

扰动还沒有到达这里。

現在假定 $t>\frac{a}{c}$。把 $w+c$ 和 $w-c$ 的分布情况画在圖 7, з 上。在 $-a+ct$ 和 $a-ct$ 兩点上,速度分布綫有轉折,除中点外,各点的速度都不等于零(圖 7, и)。c 的分布,也就是 ABA' 綫与 $AB'A'$ 綫縱坐标之差的一半的分布画在圖 7, к 上。在 $-a+ct$ 与 $a-ct$ 之間仍是折綫的水平段,不过現在水平段的高已經随时間变化了。这里要指出,$t>\frac{a}{c}$ 时我們作圖的合理性是由于: 向左推进与向右推进的膨脹波現在是完全独立的,这是根据方程組(6.1)—(6.2)得出来的。

我們来把 c 曲綫水平段的高度求出来。从圖 7, з 的兩个相似三角形 $[(a, 0), (a+ct, 0), A'C]$ 和 $[(a, 0), (ct-a, 0), (ct-a, \xi)]$ 得知,$-a+ct$ 点的縱坐标等于 $\xi=-\left(\frac{2a}{t}-c\right)$。算出 B 点的縱坐标即 c 与 $-a+ct$ 点的縱坐标即 ξ 这二者之差的一半,便得水平段的音速値,$\frac{a}{t}$。这个値只在时間 $t=\frac{a}{c}$ 之后才适用。在 $t>\frac{a}{c}$ 之后,該区中的压强与时間的三次方成反比而下降。压强在空間的分布画在圖 7, л 上。

不論什么时候,分布圖总是与中点 $x=0$ 相对称的,在这一点上,速度等于零。如果在这一点放上一道絕对剛性的壁,那剛性壁兩边的介質运动是完全不会改变的。因此,我們所研究的情况便完全包括了另一种安排: 只除去管子里的一塊隔板,使气体向一边膨脹;这只看圖 7, а 到 л 各圖的半边就够了。

圖 7, м 上画的是作用在壁上的压强随时間变化的情况。在 $t=\frac{a}{c}$ 之前,压强保持为常数,然后按$\left(\frac{a}{ct}\right)^3$的規律下降。对壁作用的冲量等于 $\int_0^1 p dt$,起初冲量与时間成正比,后来只等于 $p_0\left[\frac{3a}{2c}-\right.$

$-\frac{1}{2t^3}\left(\frac{a}{c}\right)^3\Bigg]$(圖 7, *и* 上的有花曲綫)。所以总的冲量等于 $\frac{3ap_0}{2c}$。压强为常数期間所产生的冲量是$\frac{ap_0}{c}$,即只是全部冲量的$\frac{2}{3}$。

凡是 $k=3$ 的原已压縮的介質向真空中膨脹的問題,都可以無条件地用这里所說的办法去解。但也有一些原始分布会造成解題困难的。我們用下面的例子来說明一下。

設在一根長管中有一塊隔板,把兩段密度不相同而 k 值同为 3 的介質分隔开,隔板左边的密度大于隔板右边的密度。在圖 8, *a* 上画了 $w+c$ 和 $w-c$ 的原始分布。因为初始瞬間介質速度等于零,所以 c 的分布与圖 8, *a* 的上面一条曲綫重合。

圖 8, *б* 表示較晚以后一个瞬間 t 的情况。从这張圖上,可以把 m 点以左和 n 点以右的一切狀况都單值地定出来。在这兩点之間,c 和 w 都是坐标的三値函数(圖 8, *в* 和 *г*)。

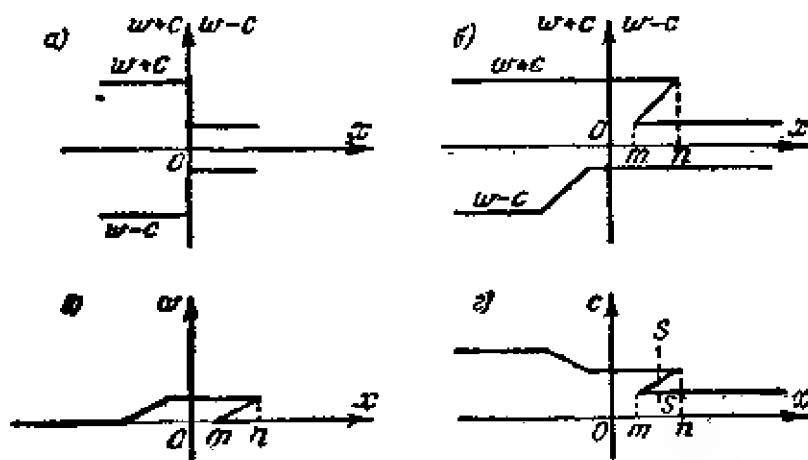


圖 8.

这当然是沒有物理意义的,这說明在 m 与 n 兩点之間,不能用气体动力学的微分方程来处理。事实上,如圖 8, *a* 所示,密度和压强的突躍,是作为低压区的震波和高压区的膨脹波的总体而推进的[1]。只要原始条件給的是有突躍的話,通常,情形总是这样的。

[1] 澤尔道維奇著:"震波理論及气体动力学引論",苏联科学院出版社,1946, § 12, 第 109 頁。

m 与 n 之間的震波位置，在突躍不很强的时候，可以根据質量守恒条件去决定。这时应該計及这样一个情况：密度 ρ 与 r 成比例，且气体的質量就是为圖 8, 2 曲綫的面积所代表的。因此，如果作一条截綫 $s—s$，使划了影綫的两个三角形的面积恰好相等的話，那末如果震波的波头恰在 $s—s$ 上，質量守恒律便得以滿足了。这时要紧的是震波应相当弱，因为强震波中熵有变化，其終了狀况就不能与初始狀况滿足同一个 $p=A\rho^3$ 关系了(例如，在突躍的兩边，这个比例律的系数 A 可能取不同的数值)。震波中熵有很大变化时，就不能再認为曲綫的面积就代表質量了。

可見，气体动力学微分方程本身就指出了震波發生的必然性。因此震波的存在早在实驗發現以前就已为人所預料到，并进行过理論的研究了[①]。

§7. 中心对称問題

現在我們来推演一下中心对称运动的气体动力学方程。这时，速度只有一个徑向分速，$w_r=w(r,t)$，其他各量也只决定于 r 和 t。

取兩个半徑 r 及 $r+\delta r$ 画兩个同心球面，并作一圓錐，圓錐的頂点在坐标原点上，这圓錐在兩同心球面之間划出一塊無限小的体积，圓錐所割下的立体角是 $d\Omega$，我們来对这塊体积中的質量推演其質量守恒律。我們看到，这一塊流体中所包括的流体微团总是原来的那一些，其厚度 δr 是变数，而微元立体角則由于运动是徑向的而不变。这就反映在用不同符号来表示無限小的微量上：一个用 δ 另一个用 d。在指定的体积里，質量是 $\rho r^2\delta r d\Omega$。所以

① 澤尔道維奇著："震波理論及气体动力学引論"，苏联科学院出版社，1946，§10，第73頁。

$$\frac{d}{dt}(\rho r^2\delta r d\Omega)=0.$$

把实导数展开，得

$$\delta r\left(r^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+w\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho)\right)+\rho r^2\frac{d\delta r}{dt}=0.$$

但$\frac{d\delta r}{dt}=\delta\frac{dr}{dt}=\delta w$，于是上式用$\delta r$通除之后便得中心对称运动的質量守恒方程如下$\left(以\frac{\partial w}{\partial r}代替\frac{\delta w}{\delta r}\right)$：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho w)=0. \tag{7.1}$$

这塊体积中所包有的动量等于$\rho r^2\delta r d\Omega w$。这个量对时間的总导数等于作用在这塊質量上的合压力。不难看到，这个导数是等于$-r^2\delta r d\Omega\frac{\partial p}{\partial r}$的，即等于体积乘压强坡度幷取負号。

圖 9 上表示了作用在这塊体积上的合力的某些分力。作用在內球面部分上的力是$pr^2d\Omega$。在外球面部分上的作用力是$-[p(r+\delta r)](r+\delta r)^2d\Omega$。此外，在这塊体积的側表面（錐面）上还有作用力。这些力在半徑方向的合力不等于零。現在对半頂角为$d\theta$的圓錐来把这个合力求出來。作用在單位側表面上的徑向力是$pd\theta$，这塊体积全部側表面上的徑向作用力便是$pd\theta\cdot2\pi r\delta r\, rd\theta=2pr\,\delta r d\Omega$，式中的$d\Omega=\pi(d\theta)^2$。把这个力同球面上的力合在一起，得$-r^2\delta r\,d\Omega\frac{\partial p}{\partial r}$。

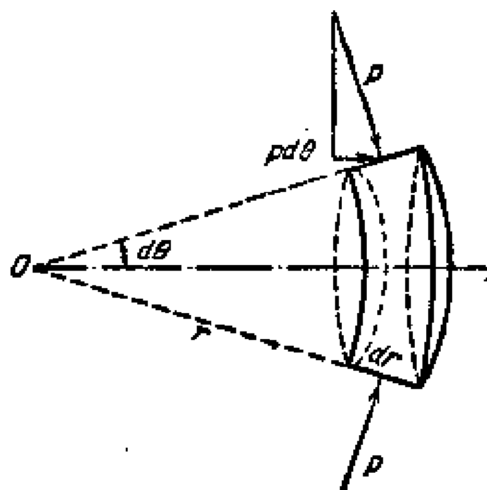


圖 9.

考慮到$\rho r^2\delta r\,d\Omega$是微元質量，取动量的实导数，使得徑向分

速的方程

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{7.2}$$

熵的方程 (4.5) 在形式上不变，而質量守恒方程 (4.2) 則需要用 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2$ 代替 $\frac{\partial}{\partial x}$，这是把平面运动的質量守恒方程 (4.2) 变为中心对称运动的方程(7.1)所应作的替换。

再把(7.1)式这样改写一下：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho w)+\frac{2\rho w}{r}=0. \tag{7.3}$$

我們看到，中心对称运动与平面运动的唯一差别在于多了 $\frac{2\rho w}{r}$ 这一項。不过这点差别是極重要的。例如，如果仍按公式(5.2)引用 u，并把 $w+c$ 与 $w-c$ 的导数分开則用同一方法可得与(5.3)(5.4)相对应的另一組方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}(w+u)+(w+c)\frac{\partial}{\partial r}(w+u)+\frac{2wc}{r}=0, \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w-u)+(w-c)\frac{\partial}{\partial r}(w-u)-\frac{2wc}{r}=0. \tag{7.5}$$

特性綫仍旧可以同前面一样，用下列的方程求：

$$\frac{dr}{dt}=w\pm c, \tag{7.6}$$

但这兩个方程已經不能解释为常数值 $w\pm u$ 所沿着推进的綫了，因为 $w\pm u$ 的兩偏导数之比現在已經不等于 $w\pm c$ 了。

不过特性綫仍保有一般的意义，这可以从 $w\pm u$ 沿其各自的特性綫对时間的总导数式子看出：

$$\frac{d}{dt}(w\pm u)=\frac{\partial}{\partial t}(w\pm u)+\frac{dr}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(w\pm u).$$

如果按特性綫的定义 (7.6) 来代替这个式子里的 $\frac{dr}{dt}$，并利用(7.4)—(7.5)，即得

$$\frac{d}{dt}(w\pm u)=\mp\frac{2wc}{r}. \qquad (7.7)$$

这就是說，所有各量沿特性綫的变化，只决定于这些量本身在特性綫上的值，而不是这些量的导数。

下面举一个作圖綫的例子說明这一論断的意义。

例如在 r, t 面上，沿某一曲綫 AB，給定了 w 和 c 的數值(圖10)。在这条曲綫上的每一点，都可以作出起始的一段無限微小的特性綫。这种特性綫有一族画的是实綫，另一族画的是虛綫。只要这兩族特性綫作得够密，二者的第一次交点必極靠近最初的 AB 曲綫，兩族的这一段特性綫都可看作是直綫。就任何 1, 3 点和 2, 3 点来說，很容易直接从圖上求出它兩个对应的时間增量 $dt_{3,1}$ 和 $dt_{3,2}$ 来。根据这兩个时間增量算出 $w+u$ 和 $w-u$ 沿特性綫的增量来：$d(w+u)=-\frac{2w_1c_1}{r_1}dt_{3,1}$，$d(w-u)=\frac{2w_2c_2}{r_2}dt_{3,2}$。

根据这兩个一次方程可以求出点 3 的 dw 和 du，用同样的办法可以把 AB 附近的整个一排点的 dw 和 du 都算出来。按(5.9)，可以把这些点上的 c 值全求出来，再重复同样的办法，計算下一排交点。这样一層一層下去，可以把离原出發曲綫極远的点的狀況都算出来。

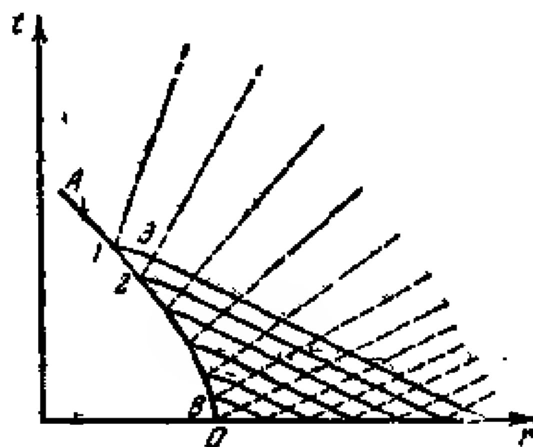


圖 10.

如果某一点 r，在 t 时还沒有哪一族的特性綫到达，那就可以断言，这一点还沒有受到原始扰动的影响。在中心对称运动，不可以簡單地說，固定狀况沿特性綫推进，因为各个量沿特性綫是在变化的。但有了特性綫網，只靠特性綫的位置及斜率就可得知各个量沿特性綫是怎样变化的。对于"沿特性綫推进"这句話，在

中心对称运动中就应作这样的了解。

現在来看一些簡單的例子。首先，設 $w \ll c$，大家都知道，这相当于准音波运动。这时在方程(7.6)中可以假定

$$\frac{dr}{dt} \approx \pm c \approx \pm c_0,$$

这是因为 c 与 c_0 的差别，即已扰动介質中的音速 c 与未扰动介質中的音速 c_0 二者之差，是与 w 同一数量級的。在这样的近似做法之下，兩族特性綫都可以認为是直綫，其方程都可以写为 $r=r_0+$ $+c_0t$。換句話說，气体狀况以定速沿斜率为定値的直特性綫推进。

我們已經指出过了，在中心对称运动里，这样的一种推进是帶有假定性質的，因为气体的各个量沿特性綫是在变化的。

把(7.4)—(7.5)方程組改写成准音波的情形:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w+u)+c_0\frac{\partial}{\partial r}(w+u)+\frac{2wc_0}{r}=0, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w-u)-c_0\frac{\partial}{\partial r}(w-u)-\frac{2wc_0}{r}=0. \tag{7.9}$$

二者相加，得

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-c_0\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{7.10}$$

这个式子也可以直接从欧拉方程(7.2)导出来，只要用近似式子 $c_0\frac{\partial u}{\partial r}$ 代替 $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$（参看(5.2)式），并略去二次項 $w\frac{\partial w}{\partial r}$ 就行了。

(7.8)—(7.9)方程組所要寻找的解是这样一种形式的:

$$u=\frac{1}{r}\dot{f}\left(t-\frac{r}{c_0}\right), \tag{7.11}$$

这里，一点表示对时間的导数，如果变数是 $t-\frac{r}{c_0}$ 的話，函数 f 对时間的导数就等于对 $t-\frac{r}{c_0}$ 的导数。利用(7.10)，由是得

$$w=\frac{c_0}{r^2}f+\frac{1}{r}\dot{f}. \tag{7.12}$$

把(7.11)和(7.12)兩式代入原方程組(7.8)—(7.9)，很容易証明方程組是都得到滿足的。f 和 $\dot{f}$ 兩函数沿第一族特性綫 $r=r_0+c_0t$ 都是常数，所以 u 和 w 只隨因子$\frac{1}{r}$和$\frac{1}{r^2}$而变化。

方程組的第二种解与第一种不同之处在于这任意函数的自变数符号不同：

$$u=\frac{1}{r}\dot{g}\left(t+\frac{r}{c_0}\right), \tag{7.13}$$

$$w=-\frac{c_0}{r^2}g\left(t+\frac{r}{c_0}\right)+\frac{1}{r}\dot{g}\left(t+\frac{r}{c_0}\right). \tag{7.14}$$

只要給定 $u(0, r)$ 和 $w(0, r)$ 兩値在空間的原始分布，我們就能知道 f 和 g 兩函数，假定其中的 $t=0$，并可組成(7.11)，(7.12)，(7.13)，(7.14)各解的綫性复合。先就所得的方程解出 f 和 g，然后再替回变数 $t\mp\frac{r}{c_0}$，这样就得到了所要的一組解。有时必須考慮到边界条件；例如，在固体壁上，气体运动速度 w 应等于零，不論 r 和 t 是什么値。

現在說一說怎样將特性綫法用于准音波运动。

我們来看空气中波幅很微小的球面發散波。这时，我們已經知道 $u=5c_0$。波幅微小，保証 $w\ll c$ 这个不等式成立，而且特性綫的斜率是常数。假定起初只有發散波存在；那末向心波不存在的条件便是 $J_-=w-5c=-5c_0$，于是得 J_+ 在空間的原始分布为 $J_+=w+5c=y(r)$。假定 $y(r)$是 r 的綫函数，如圖 11 所示。

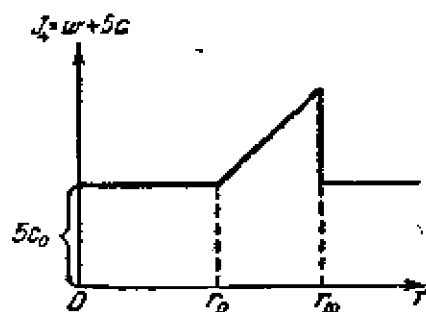


圖 11.

当 $r<r_0$ 时，$J_+=5c_0$；当 $r_m\geqslant r\geqslant r_0$ 时，$J_+=A(r-r_0)+5c_0$；当 $r>r_m$ 时，$J_+=5c_0$。最大的 $A(r_m-r_0)$ 値比 c_0 小得多。經过不

十分長的一段时間之后，向心波还沒有来得及激發出来，我們可以假定在这整段时間内，$J_- = -5c_0$. 而速度 $w = \frac{J_+ - 5c_0}{2}$。这个速度的表达式应代入 J_+ 沿特性綫变化的方程（7.7）中去。如果再按（7.6）式和准音波的不等式把該方程中的 dt 代以 $\frac{dr}{c_0}$，（7.7）便可写为

$$\frac{dJ_+}{dr} = -\frac{2w}{r}.$$

把 $J_+ = 2w + 5c_0$ 代入这个方程，得

$$w = \frac{F}{2r},$$

$$c = c_0 - \frac{F}{10r}.$$

式中的 F 在每条特性綫上各是一个常数。

F 的值根据起始条件决定。假設給定的特性綫在 $t=0$ 时，从 $r = r_0 + r_1$ 这点出發。在这一点上，$w = \frac{Ar_1}{2}$，所以 $F = Ar_1(r_0 + r_1)$。F 的值也可以从 c 上去定。总之，

$$w = \frac{Ar_1(r_0 + r_1)}{2r},$$

$$c = c_0 - \frac{Ar_1(r_0 + r_1)}{10r}.$$

而从 $r = r_0 + r_1$ 点起的第一族特性綫的方程是

$$r = r_0 + r_1 + ct.$$

用这个式子把上面兩式的 r_1 代掉，便得 w 和 c 随坐标和时間的变化情况：

$$w = \frac{A(r - r_0 - c_0t)(r - c_0t)}{2r},$$

$$c = c_0 - \frac{A(r - r_0 - c_0t)(r - c_0t)}{10r}.$$

这兩个式子只在 $r < r_m + c_0t$ 范圍以内适用，因为再远，波还沒

有及到。由 c 的式子可見，在这个波之后有膨脹地帶形成。确然，例如使 $r=r_0$，則在 $t>\frac{r_0}{c_0}$ 时，加到 c_0 上去的是負值。平面音波沒有这种性質，平面音波在推进时不变形。

現在来研究一下十分强烈的球面波在气体中的推进情况。

假定在气体中某塊不大的区域里，譬如由于爆炸的結果，放出了極大的能量 E。这些能量在球面压縮波内作一定的分布，这球面波是从爆炸点推开去的。只要放出来的能量确实够大，那末在有限的一定时間内，气体在压縮以前所具有的热能和波所帶来的能量比起来，是小得可以略去不計的。气体的原有压强也可以略去，因为压强是与單位气体所具有的能量成正比的。

于是，像我們在§3里已經看到过的那样，在震波的波头上，压縮趋于極限常数。在双原子气体，特别是空气，十分强烈的震波把密度压縮为六倍。换句話說，震波波头上的密度与未压縮气体的密度之比是个常数。这种震波为兩个参数所决定：原始能量 E 和原始密度 ρ_0。

我們来比較兩个波，一个的原始能量是 E，原始密度是 ρ_0，另一个的原始能量是 $a^{-1}E$，原始密度是 $b^{-1}\rho_0$。我們会發現，只要把第二个波的坐标比例尺和时間比例尺作必要的变更之后，这兩个波的所有各量在空間上以及时間上的分布便完全相同。

为了証明这一点，先从波的总能量式子講起，这总能量在波推进的时候是守恒的：

$$E=\int_0^{r_0}\left(\rho\frac{w^2}{2}+\frac{p}{k-1}\right)dV. \qquad (7.15)$$

式中积分号内的第一項是單位体积的气体所具有的动能，而第二項是它所具有的热能［参看(3.1)式］，r_0 是波的半徑。把 $E=aE'$，$\rho_0=b\rho_0'$ 代入(7.15)式，然后問長度的比例尺和时間的比例尺 $r=\alpha r'$，$t=\beta t'$ 应該怎样变法，才能使帶撇的各量所写成的(7.15)方

程和原来各量所写成的方程在形式上完全一样。我們首先看到，單位体积气体的动能与热能之比，不論什么时候，在空間任何一点上都应保持为原先的比值。因为單位体积气体的动能有一个因数 $\frac{b\alpha^2}{\beta^2}$，所以压强也应有这样一个因数。体积 dV 的因数是 α^3。由此得 a, b, α, β 四个量之間的条件如下：

$$a=\frac{b\alpha^5}{\beta^2}.$$

所以，如果在某瞬間 t 时取 r 点上所有各个量来看，那末只要兩个波的

$$\zeta=r\left(\frac{\rho_0}{Et^2}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{7.16}$$

相等，这些量在兩个波上便是一样的。可見，任何一个物理量，它与 E 和 ρ_0 的关系，只能通过 ζ 这样一个复合量表現出来，不能与 E 或 ρ_0 的別种形式發生关系。这种气体运动称为自型运动，即运动是自动相似的。

我們指出，要寻找的速度、密度和压强表为如下的形式是很方便的：

$$w=\frac{4}{5(k+1)}\frac{r}{t}W(\zeta);\quad \rho=\frac{k+1}{k-1}\rho_0P(\zeta),$$

$$p=\frac{8\rho_0}{25(k+1)}\frac{r^2}{t^2}\Pi(\zeta), \tag{7.17}$$

在这些式子里，E 和 ρ_0 都是通过 ζ 这个复合量而被包括在内的。震波的波头位置为某个常数 $\zeta=\zeta_0$ 值所决定。求常数值 ζ_0 的方法后面再講。現在我們来算一下，当 $\zeta=\zeta_0$ 时，W, P, Π 三函数各取什么值。我們立刻可以看出，$P(\zeta_0)$等于一，因为在震波的波头上，密度等于$\frac{k+1}{k-1}\rho_0$。再有，按(3.6)，$W(\zeta_0)$与 $\Pi(\zeta_0)$ 之間应有如下的关系：

$$[W(\zeta_0)]^2=\Pi(\zeta_0).$$

現在要証明，$\Pi(\zeta_0)=1$。

震波的半徑表为 ζ_0 的函数是这样的：

$$r_0=\zeta_0\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}},$$

由此得震波的推进速度

$$D=\frac{dr_0}{dt}=\frac{2}{5}\zeta_0\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}t^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5}\frac{r_0}{t}. \tag{7.18}$$

可見，震波的推进速度随 $t^{-\frac{3}{5}}$ 下降。在强烈的震波，按(3.5)和(3.6)有这样一个关系：

$$w_0=\frac{2}{k+1}D=\frac{4}{5(k+1)}\frac{r_0}{t},$$

式中的下标 0 表示 w 是波头上的数值，即 $w_0=\frac{4}{5(k+1)}\frac{r_0}{t}W(\zeta_0)$。消去 $\frac{4r_0}{5(k+1)t}$，由是得

$$W(\zeta_0)=1,\quad \Pi(\zeta_0)=1.$$

这样，就找到了起始条件，而 W, P, Π 三个函数是能滿足起始条件的。

这个問題的全部方程組包括(7.1)(7.2)兩方程，还有膨脹气体中等熵的条件，即(4.5)方程。熵应写成这样：$S=\ln\frac{p}{\rho^k}$ $\left(\frac{p}{\rho^k}=\text{常数}\right.$ 就是等熵方程$\left.\right)$。如果把(7.17)各式代入这个方程組，就可以得到 W, P, Π 三个未知函数的三个常微分方程。常微分方程組这里不列出来了。我們只指出很重要的一点来，这一常微分方程組可以化成一种形式，使其中所包含的 ζ 只通过 $\frac{d\zeta}{\zeta}$ 这一比値而存在。这个比又可以写作 $d\left(\ln\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)$，并可看作方程中存在的不是 ζ，而是

$$\xi=\frac{\zeta}{\zeta_0}.$$

这样，W, P, Π 各函数的起始条件便是对 $\xi=1$ 而言的了。于是，求定一切数量的整个方程組和起始条件便只包含抽象的数量了

除气体的本性即 k 外，与任何东西都沒有关系了。这个方程組在給定的起始条件下是可以进行积分的，而且是一劳永逸的，凡是足够强烈的球面波都能用。只要把解代入总能量式子(7.15)，并进行积分，則还可以决定 ζ_0 值。双原子气体的 $k=7/5$，ζ_0 等于 1.033。

圖 12 上画了 $W(\xi)$, $P(\xi)$ 和 $\Pi(\xi)$ 三个函数对 $\xi=\frac{\zeta}{\zeta_0}=\frac{r}{r_0}\left(k=\frac{7}{5}\right)$ 的变化曲綫。所画的各函数都是对波头上各該函数值之比，假定 $\zeta_0=1$。奇怪的是，在中心的压强等于波头上压强的一个一定的分数，而密度則降为零。可見，在中心温度是極高的（照說温度应达無限大）。边界上密度很集中，即密度集中在波头上，这是由于，为震波所扫过的那塊空間，压縮前气体作均一分布，而压縮后在波头上密度变为六倍，因此，質量应該集中在波头上。

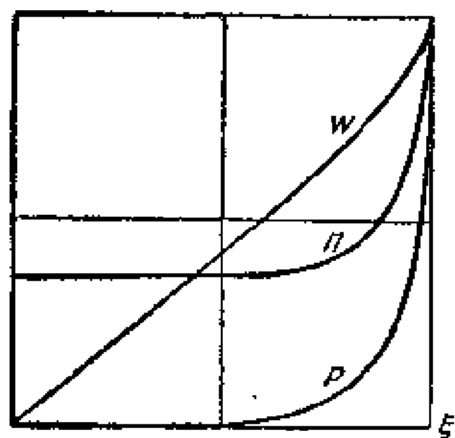


圖 12.

这里所介紹的解答是謝道夫(Л. И. Седов)做出来的①。

① 謝道夫著："力学中的相似及因次方法"，苏联国立技术理論書籍出版社，莫斯科，1954，又謝道和利夫希茲著："連續介質的力学"，苏联国立技术理論書籍出版社，莫斯科，1953。

第二章　無損失的爆震及燃燒

§8. 爆震波

大家都知道，在可爆炸的混合气里，例如在氫与氧的可炸混合气里，或氫和氯的混合气里，是可以产生化学反应波的。人們使混合气在長管中进行反应，以观察这种波。

反应可以有兩种根本不同的推进法。如果反应是由一塊小地方加热而引起的，或是由微弱的电火花所引起的，那时看到的是緩慢燃燒。这种反应推进具有定型的性質，若是从管子的敞口端开始的。因为緩慢燃燒的速度是每秒 1—2 米，所以由于加热而产生的任何压强变化都会远远赶过火焰头（压强变化是以音速推进的），並通过管子的敞口端而和外界的压强拉平。在兩端都封閉的管子里，随着火焰推进，压强必增高，反应的推进就不能是定型的了。这时，压强虽然随燃燒而增高，但在任一指定瞬間，容器內部各点的压强几乎是完全相同的。

如果在管子的一端由某种爆炸物的爆炸引起反应，那就看到完全不相同的一种反应推进法，这种反应推进的特点是反应在气体中的推进速度極高（每秒 2—3 千米），同时压强有局部的極大增加。

爆炸式的化学反应以極高的速度推进，这种現象称为爆震。

在一根極長的管子里进行燃燒时，燃燒自己也可能引起爆震（参看 §16）。

在反应波头之前的气体中，当波还沒有达到它之前，扰动並不發生，因为爆震的推进是超音速的。

在容器内推进的爆震能击碎容器壁。管子是敞口的还是閉口的对于爆震推进沒有关系：既以超音速在推进，波的前面有什么东西存在都沒有关系。

爆震不仅可以在气体里进行，而且还可以在濃集物体中进行，在这种物体中，爆震波的速度可达 8 千米/秒。关于固体和液体爆炸物中的复杂爆震問題放在 § 17 和 § 18 两节里講，这里只講气体中的爆震。

实驗指明，一定的混合气在直徑够大的光滑管中的爆震速度，和管直徑完全沒有关系，并且簡直和混合气初始压强初始溫度也無关，只要溫度够發生爆震，只要初始狀况之下反应速度低到几乎为零。

在粗大的光滑管中，爆震速度只决定于反应热和混合气的成分。

爆震現象的解釋是这样的。爆震波的波头是一道很强烈的震波，这道震波把气体的溫度提到極高。在这样的高溫下，化学反应便剧烈进行，在波头之后一定的区域里，以爆發的方式放出热量来。在这个区域之后，是那些在进行逐漸膨脹的反应产物。

化学反应的能量用于維持震波不衰：我們看到，震波的能量不断地消耗在被压縮气体的不可逆加热上。因此，沒有外界能源的話，定型的震波是不可能存在的。前面我們一直假定这个外界能源就是推挤气体的活塞。在爆震波里，能量是在化学变化时釋放出来的。这种能量除了維持震波不衰之外，还用在將反应产物加热上。

直到現在为止，我們在說到震波时都假定震波的速度是常数，或說波幅是常数也完全一样。但如果震波的产生是由于某个一定有限值的冲击，那只有在很短的一段路程上才可以認为它是定型的，在这段路程內气体的动能还来不及显著地消耗于不可逆的加热上。前面为了避免研究有限时間内的非定型波，我們是用活塞

来說的。

但活塞速度可以是任意的，因此，我們还得認为震波是由一个可以随意給定的參数所决定的。这个參数可以是压强突躍，也可以是波速。爆震就和震波不同了，在每一种給定的混合气里，爆震只能有一个一定的推进速度。爆震可以在随便多長的路程中以定速推进，且波中压强也保持定値，因为化学反应的能量就蘊藏在介質中，要靠爆震去释放出来。

本节中我們要研究的是，爆震在气体中作定型推进的情况。

首先要指出，当爆震波速度等于 2—3 千米/秒的时候，震波波头中的溫度已經升高到足以使化学反应作爆發式的进行了。

强烈震波的厚度不超过分子的一个自由行程①。但化学反应的进行却需要数目众多的分子互相撞击，因为起化学反应的只是互相撞击的分子中一个極小部分。可見化学反应区比引起气体燃燒的震波的波头厚得多，我們可以清晰地划分出，哪个地帶里气体剛受过压縮但尙未起化学反应，哪个地帶里气体已經基本上完成了反应。

这样我們便可以划出三个控制面来：一个在波头之前，那里是未經扰动的气体，第二个紧接在波头之后，那里气体已受压縮，但尙未开始进行化学反应，第三个，那里化学反应已經完成了。

把这三个控制面上的各項物理量分别記以下标 0, 1, 2。于是，先假定爆震速度 D 是給定的，那就可以根据 0 面的狀况求出 1 面的狀况来。

假定混合气的比热与混合气的溫度無关，大致保持为一常数，我們就可以写下初始狀况的焓如下：

$$H_0=\frac{k}{k-1}p_0v_0+Q=c_pT+Q,$$

① 參看 Я. Б. 澤尔道維奇著"震波理論及气体动力学引論"，苏联科学院出版社，1946。

式中的Q是化学能。

紧接在波头之后，反应尚未开始进行之处，焓可以写成这样：

$$H=\frac{k}{k-1}p_1v_1+Q=c_pT_1+Q.$$

在两个焓值之差的式子里，当然Q是消去了的，我們便得到震波理論中已知的一个式子[参看(1.11)]：

$$\Delta H=c_p\Delta T=\frac{(v_1+v_0)(p_1-p_0)}{2}.$$

在强烈震波里，我們知道压縮后气体的比容与压縮前气体的比容有这样一个一定的关系：

$$v_1=\frac{k-1}{k+1}v_0.$$

最后，震波速度可以用这样一个公式来表示：

$$D^2=v_0^2\frac{p_1-p_0}{v_0-v_1}.$$

由此式解p_1-p_0，然后代入ΔH的式子，得

$$c_p\Delta T=\frac{D^2}{2}\left[1-\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\right]=\frac{D^2}{2}\left[1-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\right].$$

我們拿可炸混合气$2H_2+O_2$的爆震做例子說一說，爆震波的推进速度$D=2800$米/秒。氫在400°至2000°K之間的模尔比热c_v差不多是常数，較$\frac{5}{2}R$略大一点。这是因为氫分子具有十分巨大的振动量子，到2000°K时它差不多还在作固体迴轉：它的振动还沒有激發起来。氧在2000°K时模尔比热約是$3.25R$，对于氫氧混合气的模尔比热我們取平均值：$c_v=3R$，$c_p=4R$。混合气$2H_2+O_2$的平均分子量等于$\frac{2\times2+32}{3}=12$，而$R=8.3\times10^7$尔格/度(机械功單位)。用这些数值，我們得$\Delta T=1500°$，所以如果原始混合气的溫度在300°K左右的話，震波波头之后的溫度便在1800°K左右。在1800°K时，这一可炸混合气就極迅速地起反应了。

現在我們要証明，确实有稳定的定型爆震存在，并要根据反应产物的已知的狀况方程和給定的反应热，把相应的爆震速度計算出来。

事实上这一計算只有在下列的兩种極端情况下才能算到底：1）理想气体，它的全部压强都是由热运动而来的，它的狀况方程是这样的：$pv=RT$；2）几乎全部压强都是由分子之間的彈性力而生的；裝填密度在 1.5 克/厘米^3 左右或更大的濃集爆炸物，就是这种情形。对于这兩者之間的情况，就只能用内插法去計算，或多或少有一些誤差了。

为了使計算公式簡單些起見，在本节中除此以外还假定在反应过程中气体的比热是常数，即与溫度和气体成分無关。換句話說，就是假定气体的分子数目保持不变，每一分子的比热也不变。所有这些簡化都是不涉及原則性的。

我們已經說过，这里要研究的是稳定的定型爆震情况，这是为了保証爆震具有定速而在化学反应区内所应發生的情况。

气体既作定型运动，則

$$D^2=v_0^2\frac{p-p_0}{v_0-v}$$

这个关系应該在反应内任何一个控制面上都得到滿足，否則，各点的推进速度如果不相同的話，那末变化过程就不可能是定型的了。所以，推进速度 D 对一切控制面說来都是一样的。我們已經知道，这个关系只根据質量守恒和动量守恒兩定律就导出来了，因此与反应能一点关系沒有，与进行反应的物質的屬性，或反应产物的屬性也一点关系都沒有。如果在 (p, v) 圖綫上表示出在給定速度 D 之下爆震波內所进行的过程，那末一切过程都在

$$p=p_0+\frac{D^2}{v_0^2}(v_0-v)$$

这个方程所代表的直綫上。这条直綫称为米海尔松(Михельсон)

直綫[1]。紧接在震波波头之后的狀况 1（圖 13）是由狀况 0 經突躍变化而达到的。这个变化是在分子的一个自由行程之内进行的，因而不应設想介質沿 01 直綫进行变化。从 0 点之变到 1 点，可用雨貢紐絕热綫 $0A1$ 来代表。在震波之后，即在控制面 1 之后，化学反应就开始了，并有热量放出来。如果作出那条代表中間狀况的雨貢紐絕热綫，这种曲綫就应高于 $0A1$ 綫，因为在 (p, v) 圖綫上，这种曲綫所代表的各点具有較大的焓值。这种絕热綫在圖上画成虛綫。

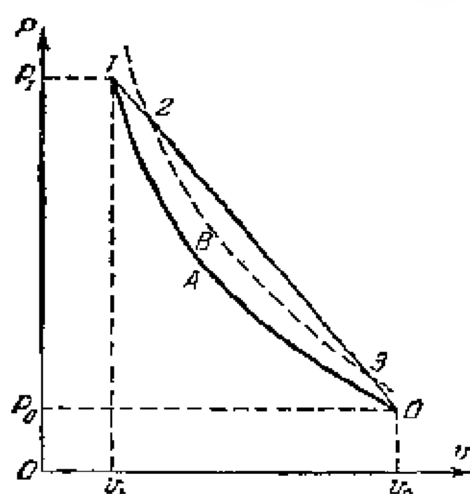


圖 13.

但从另一方面看，气体狀况应沿 01 直綫变化。为了使这条直綫能落在虛綫的絕热綫上，应从 1 点向右移；在震波波头之后进行化学反应并放出热量，这些变化是和气体的膨脹——密度及压强的下降一起發生的。

現在研究一下全部化学反应热 Q 都放出来的一种絕热綫。这里要証明，当爆震波作自由推进时，即后面沒有压縮，也沒有在波头之前用人工燃点的話，这条絕热綫就应該与 01 直綫相切。

在証明这一論断之前，我們先說一些这一論断的推論。这样，証明的本身就可以大大簡化了。

代表全部热量放出的絕热綫 324，已和絕热綫 $0A1$ 一同画在圖 14 上了。

这一絕热綫的方程很容易得到，只要考虑到，对应于全部能量都放出来的狀况，其焓值已与化学能 Q 無显形的关系了。按一般

(1) В. А. 米海尔松著：米海尔松全集第一卷，第 144 頁，"新农学家"出版社(Изд. "Новый агроном")莫斯科，1930。

的形式，用 p, v 表示这个焓值，便得

$$H(p, v) - H(p_0, v_0) = \frac{1}{2}(p - p_0)(v_0 + v). \tag{8.1}$$

如果气体的比热与温度沒有关系的話，这个方程就变得特别簡單，因为这时焓是用下列的公式表示的[参看(3.2)]：

$$H = \frac{k}{k-1} pv,$$

$$H_0 = \frac{k_0}{k_0 - 1} p_0 v_0 + Q.$$

把这兩个式子代入(8.1)，便得所要的絕热方程。

这个方程对曲綫上所有各点都合用，但如果我們特别对切点附近的那些点有兴趣的話，那末，(8.1)式中原先气体的压强和温度 p_0, T_0 与切点处的压强和溫度比起来，就都可以略去了；于是

$$\frac{k}{k-1} pv - Q = \frac{1}{2} p(v_0 + v);$$

由这个方程解 p，得

$$p = \frac{2Q}{\frac{k+1}{k-1} v - v_0}.$$

0A1 絕热綫有个类似的方程

$$p = \frac{2k_0 p_0 v_0}{(k_0 + 1)v - (k_0 - 1)v_0}.$$

比較这兩式的分子，我們看到，全部能量都放出来的曲綫比 *0A1* 曲綫高得多了，因为 Q 比初始焓值大得多。曲綫的交点[①]所代表的压强，在爆震波里是看不到的。

---

① 不等式 $\frac{k_0 - 1}{k_0 + 1} < \frac{k-1}{k+1}$ 能成立时，便有交点。这个交点代表原先介質的这样一种溫度，在这种溫度下，由于分解而生的压强提高超过了由反应而生的压强提高。这里 k_0 和 k 所取的某种有效值，是按方程 $E = \frac{pv}{k-1}$ 計算的。

在圖 14 上我們首先看到，*01* 直綫所代表的速度，是一切与 *423* 絕热綫能有交点的直綫所代表的速度中最低的。任何其他的直綫 *0341'*，凡是与兩条絕热綫都有交点的，必具有較大的斜率，因而，代表較大的速度[1]。同时，沿 *10* 直綫进行的定型膨脹过程应該使介質达到相当于全部热量都放出来的一种狀况，这只是簡單地按这种狀况的定义所得出的結論。

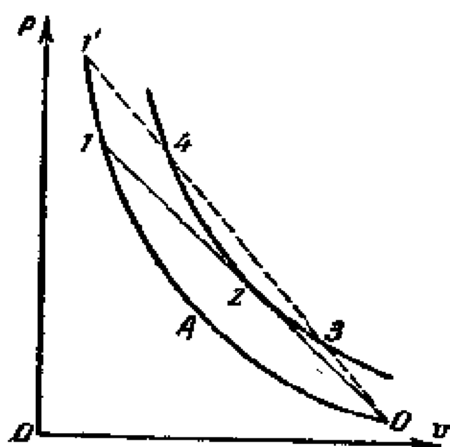


圖 14.

可見，爆震速度是用震波使化学反应推进时一切可能的定型运动速度中最低的。

进行反应的混合气的狀况沿 *01* 直綫連續变化。各点上混合气的成分根据化学动力方程决定。因为反应是不可逆的，进行反应的全部混合气的熵也是不可逆地增加的，熵在 *01* 綫上的切点 *2* 处达最大值，該点对应于热量全部釋放。重要的是，这个最大值正是在这样一条直綫上达到的，这条直綫与上面一条絕热綫相切，而不像 *034* 直綫那样在 *4* 点与絕热綫相交(圖 14)。

其实，在切点附近直綫与曲綫之差为二阶無穷小。因此，熵不仅在 *2* 点上达極大值，而且沿切綫移动一个一阶無穷小时，它的变化是二阶無穷小，因为，沿切綫移动一阶無穷小时，气体的狀况是与所放出的热量作相应变化的。在切点附近，当气体狀况沿直綫变化时与气体狀况沿曲綫变化时热量之差为二阶無穷小。这里还要指出，在上面一条絕热綫上，$dQ=TdS$，因为反应在那里已經完成，而在反应进程中，則 $dQ<TdS$。因此，如果在直綫上切点旁边

[1] 按方程(1.6)，$\rho_0^2D^2$ 在数值上等于 (p, v) 圖綫上过 (p_0, v_0) 和 (p, v) 兩狀况的一条直綫的斜率，但符号恰相反。

$dS=0$，那末在該点附近也是 $dS=0$。这也証明了沿 120 直綫移动时，熵在 2 点达極大値。只要比較一下熵沿 $1'4$ 直綫和沿 12 直綫的变化，就容易看出，在 4 点附近熵达 $1'4$ 綫段上最大的値，然而它还不是極大値。事实上，当趋近 4 点时，能量的变化因此熵的变化对于沿 $1'4$ 直綫的移动說来，都是一阶無穷小。

所以，沿 021 直綫作微小移动时，在切点旁边熵幷不变化，因而在切点附近沿 423 絕热綫熵也不变。可見，在切点附近一小段上，雨貢紐絕热綫与等熵綫相重合。因为这条絕热綫代表全部热量释放，那就可以証明，在 2 点上，雨貢紐絕热綫与反应产物的等熵綫相重合。

由此很容易导出爆震速度 D 的另一重要特性。相切的条件显然可以写为：

$$\frac{p_2-p_0}{v_0-v_2}=-\left(\frac{dp}{dv}\right)_2.$$

按剛才所說，在切点附近沿絕热綫所取的导数是与等熵綫的导数相等的：

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_2=\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S.$$

再有，根据 01 直綫的作法，得爆震速度 D 的式子：

$$D=v_0\sqrt{\frac{p_1-p_0}{v_0-v_1}}=v_0\sqrt{\frac{p_2-p_0}{v_0-v_2}}=v_0\sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S}.$$

用質量守恒方程(1.1)，把上式中的 v_0 用下式代替：

$$v_0=\frac{D}{D-w}v;$$

这里的 w 是指介質在 2 点的速度。

于是得：

$$D-w=v_2\sqrt{\frac{p_2-p_0}{v_0-v_2}}=v_2\sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S}=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}. \qquad (8.2)$$

这个等式的右側不是别的，正就是反应产物中的音速，这我們已經

知道就等于压强对密度的等熵綫导数 所以，爆震相对于反应产物的速度 $D-w$，是等于反应产物中的当地音速的。

現在我們可以来証明，为什么定型的爆震应該是与上面一条絕热綫切于 2 点[1] 的 01 直綫了。为此，我們来看兩个很接近的狀况 3 和 4（圖 15），这兩个狀况具有同一推进速度 D'，因为二者同在034直綫上。4 点代表过度压縮的爆震波，因为 $p_4>p_2$，而 3 点則代表压縮不足的波（$p_3<p_2$），这兩个波的速度 D' 都大于 D。

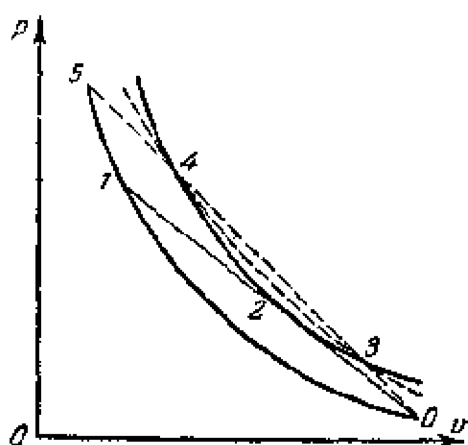


圖 15.

把这兩种狀况之下的質量守恒条件写下来：

$$\frac{D'}{v_0}=\frac{D'-w_3}{v_3};\quad \frac{D'}{v_0}=\frac{D'-w_4}{v_4}.$$

由此得，

$$\frac{D'-w_3}{v_3}=\frac{D'-w_4}{v_4}. \tag{8.3}$$

条件(8.3)可以看作是震波中的質量守恒定律，这一震波是在狀况 3 下的反应产物中推进的。这个波应該使狀况 3 突躍地轉变为狀况 4。

但推进速度有这样一个关系式：

$$D'^2=\frac{p_4-p_3}{v_3-v_4}=\frac{p_3-p_0}{v_0-v_3};$$

由此可知，这个波相对于靜止介質的推进速度，和使介質轉入狀况 3 的波速是一样的；这样才整个得到了定型情况。相对于介質 3 的震波速度等于 $D'-w_3$，而相对于介質 4 的則等于 $D'-w_4$；这也就

[1] 这一点称为契浦門—儒格点，因为是这两个人首先料到，$D-w$ 必等于反应产物中的当地音速。

是(8.3)式那个条件所表示的关系。

这种震波相当于成分不变的介質中的一个突躍，上面一条絕热綫（圖 15 中的实曲綫）就代表这种成分不变的介質。但如果写下震波 34 的能量守恒方程，那末它就对应于它自己的絕热綫（虚曲綫）。这条絕热綫和按初始比容 v_0 且按全部能量都释放所作出的絕热綫有兩个共同点，3 与 4。

但重要的是这条虚綫画的絕热綫是向下凸出的。因此，在 4 点上，該綫較 34 直綫为陡。在講震波的那一章里已經說过，在 4 点上斜率較大的曲綫代表一种对压縮后的介質而言是亚音速推进的震波［参看(2.6)式］。

所以，如果設想爆震具有速度 D'，能把介質变到完全燃燒的狀况 4，那末在反应产物中进行的任何音波都会赶上爆震波头，因为音速 $c_4>D'-w_4$。反之，在 43 段上音波是赶不上爆震波头的，因为 $c_3<D'-w_3$。可見，过度压縮的爆震波速度小于反应产物中的当地音速，而压縮不足的波其速度則大于当地音速。在切点 2 处，c_3 与 c_4 合一，$D-w=c$。

在压縮过的介質中傳播的音波应該赶上狀况 4。而跟随在爆震波后面，在反应产物中是有膨脹波在推进的，因为爆震波帶走了介質，在这个意义上就相当于管筒中的活塞向外抽。膨脹波相对于介質的速度等于当地音速，因而比狀况 4 的推进速度高，所以膨脹波应該赶上狀况 4。

不过，如果說的是定型情况，那就得要求在狀况 4 之前，即在反应地帶，气体的狀况是定型的。膨脹波不是定型的（参看§2），它不能对应于 034 直綫上的任何一点。因此，膨脹波中的非定型过程必影响化学反应的进行，化学反应也不能是定型的，这就和假定相反，并与实驗中实际观察到的也不相符。所以，化学反应結束于狀况 4 的那种定型爆震，在流体动力学上是不可能存在的。

狀况 3 的定型推进之不可能，解释起来更簡單些[1]。这只要記得下列的关系就行了：在震波 01（圖 14）之后的反应区中，气体狀况由 1 点和 1 点以下連續地按化学动力方程变化，但在 4 与 3 兩点之間的直綫段上，反应所放出的能量应大过最大能量，这显然是不可能的。

气体狀况也不能由 4 突躍至 3，因为那就相当于突躍膨脹波，而突躍膨脹波我們知道并不能成为定型波。

所以，無論狀况 3 或狀况 4，都不能代表定型爆震。只是有最低爆震速度 D 的狀况 2 才是存在的[2]。反应产物中的膨脹波恰好跟在狀况 2 之后，不会超过也不会落后：我們已經証明了，在狀况 2 之下，膨脹波的速度等于当地音速 c，这个速度恰等于爆震波相对于进行反应的介質的推进速度 $D-w$。

同时在狀况 2 上，化学能已停止释放，也就是說介質由狀况 1 起所經历的狀况只能是能量上允許的狀况。

应該指出，情况 4 只是在自由爆震波里不可能存在，这种爆震波后面跟随着膨脹波。如果不讓膨脹波形成，而从后面填充介質进去，那末 4 那种情况是完全可能存在，而且确实存在的，关于这一点后面还要講到。3 那种情况也可以用人工燃点气体的办法来获得，例如，在初始狀况下用一連串微弱的电火花引起化学反应。

还要指出，在上面一条絕热綫上，熵在 2 点有極小値。但这决不可以解释为爆震速度要按奥斯特瓦尔德（Оствальд）的最小熵增

① 参看阿勃拉莫維奇和伍利斯著："关于爆震与燃燒推进的力学"，苏联科学院报告 55, 111, 1947，又澤尔道維奇著："气体燃燒及爆震理論"，苏联科学院出版社，1944；澤尔道維奇著："关于爆震波在气态物系中的推进"，实驗物理及理論物理杂志，10, 512, 1940。澤尔道維奇著："論爆震产物中的压强分布及速度分布，特别是球面爆震波的推进"，实驗物理及理論物理杂志，12, 380, 1942

② 格黎勃（А. А. Гриб）对 2 点的选定提出了一样差不多的解释。参看格黎勃著"論壁面附近起普通爆炸时，一元震波的推进問題"，应用数学及力学杂志，8, 169, 1944。

量原理选定，因为这条原理对于强烈的不可逆过程是不适用的。

現在我們把爆震推进的基本公式用到理想气体的爆震推进上来，并已知其爆炸产物的比热是常数。此外，假定气体的初始压强 p_0 与压强 p_2 相比时可以略去，初始焓的热能部分 $\frac{k_0}{k_0-1}p_0v_0$ 与終了焓 $\frac{k}{k-1}p_2v_2$ 相比时也可以略去。公式中只留下初始的化学焓值。这样便得下列的方程組:

$$\frac{k}{k-1}p_2v_2-Q=\frac{v_0+v_2}{2}p_2, \tag{8.4}$$

$$D^2=v_0^2\frac{p_2}{v_0-v_2}=kv_0^2\frac{p_2}{v_2}. \tag{8.5}$$

这(8.5)式中是代入了理想气体的等熵导数 $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s=-\frac{kp}{v}$ 的。这样，根据相切的条件我們得

$$v_2=\frac{k}{k+1}v_0. \tag{8.6}$$

如为双原子气体，包括被激振动自由度在内，$k=\frac{9}{7}$，于是 $v_2=\frac{9}{16}v_0=0.5625\ v_0$，通常 v_2 在 0.55 至 0.58 v_0 之間。焓的方程(8.4)經簡單演化后成为:

$$pv_0=2(k-1)Q. \tag{8.7}$$

最后，代(8.6)和(8.7)式入(8.5)式，得爆震速度的最后公式

$$D=\sqrt{2(k^2-1)Q}. \tag{8.8}$$

从实驗得知，爆震速度只决定于混合气每克所含的反应热能，而与它的初始密度沒有关系。后一情形与理想气体焓的表达式形狀 $H_2=\frac{k}{k-1}p_2v_2$ 有关。

濃集物質中的爆震速度就与气体中的爆震速度不一样了，它与爆炸物的密度大有关系。因此，濃集爆炸物的任何一种爆震理論，假如想确立 D 和爆炸物裝填密度之間关系的話，就得从更复

杂些的焓的表达式出發，而不能用 $H=\frac{k}{k-1}pv$（参看后面 § 17 和 § 18）。

爆震产物單位質量的动能等于 $\frac{w^2}{2}$，而 $w^2=p(v_0-v_2)$。用已求得的式子，把这里的 v_2 用 v_0 代替，把 pv 用 Q 代替，得动能与反应热量的关系式：

$$\frac{w^2}{2}=\frac{k-1}{k+1}Q. \tag{8.9}$$

仍取 $k=\frac{9}{7}$，得 $\frac{w^2}{2}=\frac{Q}{8}$。

現在比較一下，爆震波中的压强与同样爆炸物在密閉的初始体积中，例如在坚固的鋼彈壳里，爆炸后所能达到的压强。这时仍略去初始焓值，即得：

$$E'=\frac{1}{k-1}p'v_0=Q,\ p'v_0=(k-1)Q.$$

由此得

$$\frac{p}{p'}=2.$$

可見，爆震波中的压强等于爆炸压强的 2 倍。

再同样地比一比爆炸时的溫度和爆震时的溫度。爆炸时所达到的溫度 T'，在与 p' 同样的近似計算下，等于 $\frac{Q}{c_v}$，这个 c_v 是爆炸产物的比热。

爆震时的溫度等于

$$T=\frac{1}{k-1}pv_2=\frac{k}{k^2-1}\frac{pv_0}{c_v}=\frac{2k(k-1)}{(k^2-1)}\frac{Q}{c_v}=\frac{2k}{k+1}\frac{Q}{c_v}.$$

由此得

$$\frac{T'}{T}=\frac{2k}{k+1}.$$

这个式子的値極近于 1。現在的例子中

$$k=\frac{9}{7},\quad T'=\frac{9}{8}T.$$

§9. 爆震波中化学反应的进行情况

現在我們来研究一下，在定型爆震波中产生的一些过程，这些过程是与放热化学反应的动力学有关联的。这一节里我們先假定爆震进行时管壁上無摩擦損失，也沒有向管壁給热的損失。此外，为了簡化問題起見，并假定化学动力学方程可以用一个变数写出来，作为这个变数我們取給定混合气中能起化学反应的那部分物質的重量濃度。

凡是能产生爆震的一切混合气，必具有相当多的活躍能量——每一模尔几十大卡。同时，气体中进行反应的那些相碰撞的分子的数目与总碰撞数之比，基本上是为 $e^{-\frac{A}{RT}}$ 这样一个乘数所决定，其中的 A 是活躍能量，$R=8.3\times10^7$ 尔格/模尔·度。例如取 $A=40$ 大卡/模尔，$T=2000^\circ$K，則得在化学上有效的碰撞次数仅占全部碰撞次数的 $e^{-10}=0.5\times10^{-4}$。

我們已經知道，强震波的波头厚度是可与气体分子的一个自由行程長度相并比的，因此，在这样的一个突躍区內部就不能用流体动力学来分析問題，討論必須只限于划在突躍区之外的控制面。

爆震波的厚度可以很容易地根据簡單的物理推理加以估計。爆震波的厚度应該与这样一个数字同一数量級，即波相对于介質的速度乘上进行反应所需要的时間 τ。

我們已經知道，爆震波相对于已压縮介質的速度是与音速同一数量級的，或說它是可与分子的热运动速度相并比的也一样。拿这个速度与进行反应所需要的时間 τ 相乘，便得进行化学反应时分子所走过的距离。

假定在 n 个相碰撞的分子之中有一个是起化学变化的。于是爆震波的厚度便应与 ln 同一数量級，这个 l 是分子的自由行程。

我們現在这个估計的 $n\sim 2\times 10^4$，所以，爆震波的厚度远較分子自由行程为大。于是，反应区中的介質就可以用流体动力学的方程了。

同时，略去扩散过程和傳热过程也是合理的，因为在 n 次碰撞期間，分子的移动距离很有限，只是一个与 $l\sqrt{n}$ 同一数量級的距离，而当 n 值很大时，这个数是比 ln 小得多的。

所以，在爆震波里所进行的各种过程可以用气体动力学的方程和化学动力学方程一起来描写。

本节中我們所研究的既是無損失的爆震，流体动力学的方程就变成簡單的三个守恒律：質量守恒，动量守恒，能量守恒；而且这些守恒律可以用于爆震波內部任何控制面。

前面已經詳細講过（参看 §8 开始），前兩个守恒律归結为一个波速的方程，这个方程我們可以写成这样：

$$p=\frac{D^2}{v_0^2}(v_0-v) \tag{9.1}$$

（为了簡單起見，原始压强略去不計）。

在定型爆震中，D 在波內所有各点都是定值，于是 p 与 v 便成直綫关系，气体狀况就是沿直綫变化的。

設波內某点尚未起化学反应的分子的重量濃度为 β。于是單位質量的化学能便是 βQ，而焓便是

$$H=\frac{k}{k-1}pv+\beta Q. \tag{9.2}$$

略去原始焓中的热量部分，便可列出任何一控制面的能量守恒律如下：

$$\frac{k}{k-1}pv+(\beta-1)Q=\frac{1}{2}p(v_0+v). \tag{9.3}$$

根据(9.1)至(9.3)三方程，我們便可以把 p, v, T 用化学常数 β 分別表示出来了。經簡單的演算后，得压强及比容的式子：

$$p=\frac{D^2}{v_0(k+1)}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{2(k^2-1)Q(1-\beta)}{D^2}}\right],\qquad(9.4)$$

$$v=\frac{v_0}{k+1}\left[1\mp\sqrt{1-\frac{2(k^2-1)Q(1-\beta)}{D^2}}\right].\qquad(9.5)$$

这兩个公式中的正負符号是这样的：上面的符号指的都是在給定的 β 値之下，直綫 $p=\frac{D^2}{v_0^2}(v_0-v)$ 和雨貢紐絕热綫的上交点，下面的符号指的是下交点。換句話說，上面符号指的是过度压縮的爆震波，而下面的符号則指压縮不足的情形。

由这兩个公式可知，每給定已反应物質的一个濃度 $1-\beta$，就有一个对应的最低爆震速度，这个速度为下列条件所决定：根号中的式子不为負。假定当 β 变为零时反应就結束了，得最低速度

$$D_{最小}=\sqrt{2(k^2-1)Q}.$$

只要給定速度 D，按方程(9.4)和(9.5)，就可以画出：气体进行爆震时代表释放部分能量或全部能量的一切絕热体系。

現在来看这一切物理量随时間的变化关系。这个关系为化学动力学方程所决定。当化学反应的进行可以用一个化学变数 β 来描写时，化学动力学方程便具有这样的形式：

$$\frac{d\beta}{dt}=-\beta^m f(p,T).$$

冪指数与所謂的反应級次有关。例如，双分子的反应 $m=2$。函数 $f(p,T)$ 与 $p^{m-1}e^{-\frac{A}{T}}$ 成正比。

如將 p 和 T 之値代入函数 $f(p,T)$，卽得到只有一个变数的方程了，其形式如下：

$$\frac{d\beta}{dt}=-\varphi(\beta),\qquad(9.6)$$

式中的 $\varphi(\beta)$ 是个很复杂的函数，就每个一定的气体反应說来，它是完全确定了的。

很自然地假定在波头上 $t=0$，即时間由波头到达的一瞬間算起，即由反应开始算起。这样，对 β 說来，它的起始条件便是 $\beta(t=0)=1$，而方程(9.6)的解就变成这样一个积分：$t=\int_{\beta}^{t}\frac{d\beta}{\varphi(\beta)}$。所以一切变数都可以用 t 表示出来。

凡是在絕热体系中进行反应，例如量热彈(或彈卡計，或热量計)里的反应，都具有类似的性質。在量热彈中，溫度与釋放出来的能量成正比(假定比热是常数：$T=T_0+\frac{Q(1-\beta)}{c_v}$，而压强則为狀况方程所决定。所以在絕热体系中，化学动力学方程都可归結为(9.6)那样的形式，只是右側的函数不相同而已。在这兩种場合，方程(9.6)在質方面的形式总是一样的。

我們来研究一下，震波波头附近，即进行反应的还只是很小一部分物質的那个地方，函数 $\varphi(\beta)$ 的性态。在那里，$e^{-\frac{A}{RT}}$ 这个乘数变化得最快。当 T 的升高同 T'（T' 在波头上是个一定的値）比起来只是个很小的分数时，$e^{-\frac{A}{RT}}$ 的变化与其自身同一数量級。因此，指数函数的整个变化可以用展为冪級数的办法表示出来，以 $\frac{A}{RT'}-\frac{A(T-T')}{R(T')^2}$ 代 $\frac{A}{RT}$。

活躍能量 A 同 RT' 相比是个大得很的数目，因此，把函数 $e^{-\frac{A}{RT'}+\frac{A(T-T')}{RT'^2}}$ 展开是沒有意义的（它只能包括很小的 T 变化范圍)。这里最好用 $1-\beta$ 来表 $T-T'$，因为在波头附近，$T-T'=-\left(\frac{dT}{d\beta}\right)_{\beta=1}(1-\beta)$。經这样的替代之后，在波头附近的方程(9.6)就变成下列的形式：

$$\frac{d\beta}{dt}=-\varphi(1)e^{-\frac{A}{(T')^2}\left(\frac{dT}{d\beta}\right)_{\beta=1}(1-\beta)}\qquad(9.7)$$

导数 $\frac{dT}{d\beta}$ 可以按方程(9.4)(9.5)計算出来。式子的推导这里

就不写了。

下面要証明，方程(9.7)可决定波内反应进行的主要部分。

为了追蹤爆震波内各量的变化过程，最好利用微分关系式。为此，將方程(9.1)和(9.3)对濃度微分：

$$\frac{dp}{d\beta}+\frac{D^2}{v_0^2}\frac{dv}{d\beta}=0,$$

$$\left(\frac{k+1}{2(k-1)}v-\frac{1}{2}v_0\right)\frac{dp}{d\beta}+\frac{k+1}{2(k-1)}\frac{dv}{d\beta}=-Q.$$

这里用方程(9.1)把式中的 p 代掉后由这两个方程可解出 $\frac{dv}{d\beta}$ 来：

$$\frac{dv}{d\beta}=\frac{v_0^2(k^2-1)Q}{[(k+1)v-kv_0]D^2}. \tag{9.8}$$

在波头上，$\beta=1$，而随着反应进行，β 是下降的，于是 $d\beta<0$，这也表示在动力学方程中(9.8)式右側的分母是負的，因为在波头上 $v=\frac{k_0-1}{k_0+1}v_0$，所以在一切可能的 k 值下，$k_0v(k+1)>v_0k$。因此 $dv>0$；換句話說，緊靠爆震波头之后，气体就开始膨脹了①。

因 $dp=-\frac{D^2}{v_0^2}dv$，所以波头之后的压强作單調下降。溫度則与密度和压强不同，先是由于有化学能放出而升高，后来則由于膨脹成了主要因素而下降。

只要用溫度写出能量守恒方程来，就很容易把溫度变化找出来：

$$c_pT=(1-\beta)Q+\frac{1}{2}p(v_0+v).$$

拿这个方程对比容 v 微分，并用(9.8)式代掉 $\frac{d\beta}{dv}$，即得

$$c_p\frac{dT}{dv}=\frac{D^2}{v_0^2}\frac{k}{k-1}(v_0-2v). \tag{9.9}$$

在震波波头上，这个方程的右側是正的，因此在 v 尙未 $>\frac{1}{2}v_0$ 之

① 这里指的是突躍的震波波头和在化学反应过程中的膨脹(这种膨脹不应同膨脹波中的等熵膨脹混为一談)。

前，温度一直是升高的。但在反应进行的过程中，还在反应完畢以前，v 就比 $\frac{1}{2}v_0$ 大了，所以温度經过一極大值之后就下降了。上面已經說过，温度下降的原因是释放出来的热量供不上反应产物的膨脹需要的緣故。由方程(9.8)可見，v 应永小于 $\frac{v_0 k}{k+1}$，否則 $d\beta$ 就得是正的了，而这是不可能的，因为反应是不可逆的，在沒有損失存在的情况下，反应必进行到底；因此 $d\beta$ 始終是負的，直到 β 变到零为止。

由不等式

$$v \leqslant \frac{k}{k+1} v_0 \tag{9.10}$$

得 $v_0 - v \geqslant kv$，于是按方程(9.1)便可直接得 D^2 的不等式：

$$D^2 \leqslant k v_0^2 \frac{p}{v}. \tag{9.11}$$

但我們知道

$$\frac{D}{v_0} = \frac{D-w}{v},$$

而且(9.11)的右側的第二部分乘数可以用当地音速

$$\frac{c}{v} = \sqrt{k \frac{p}{v}}$$

来代掉。这里的 c 是对应于給定的 p, T 及 β 的音速。

于是，我們从化学动力学概念出發，証明了爆震波的 D 永远是

$$D \leqslant w + c. \tag{9.12}$$

在波头之前，$w=0$ 的地方，有这样一个已知的不等式成立：

$$D > c_0,$$

这个 c_0 是未扰动介質中的音速。

这是我們在震波理論里已經知道了的，它是与震波的概念本身有关連的，是震波穩定所必要的。

另一方面，震波相对于已压縮介質的速度就是小于音速的了。不等式(9.12)已适用于紧靠波头之后的地方，那里化学反应尙未开始。由(9.12)可知，这个不等式还适用于整个反应过程，即适用

于爆震波的全部厚度。

现在將不等式(9.12)用于 $\beta=0$ 的狀况，即反应已終了的狀况。这时我們就看到，$\beta=0$ 的絕热綫上所有各点在(p, v)圖綫上都高于切点，因为切点的 $D=w+c$，在該点以上才滿足不等式(9.11)。这样我們就把 $\beta=0$ 的絕热綫在切点以下的那部分擯除了。

如果 $\beta=0$ 时，波后的介質为速度等于介質速度 w 的活塞所压縮，則凡是$D>D_{最小}$ 的波都可以是定型的运动，而 $\beta=0$ 这一点上所能成立的狀况必是在絕热綫的上部分的。如果沒有活塞在压縮，則在爆震波之后形成膨脹波，膨脹波相对于反应产物的推进速度是音速 c。

但如果(9.12)式取上边一个符号，那末 $c>D-w$，膨脹波必赶上爆震波，这在定型运动中是显然不可能存在的，因为膨脹波不是定型的；于是根据流体动力学的推理我們就不得不为自由爆震波反应完畢的那一点选取 (9.12)式中的等号，这就又得到了相切的条件

$$D=w+c. \tag{9.13}$$

凡是

$$D>w+c$$

的情形，都在絕热綫的下部分，这根据运动学的推理，得一概擯除。

现在我們来研究一下这些量沿坐标的分布，即在反应波头厚度內部的分布。波作定型的推进时，所有各量与坐标及时間的关系都是通过 $x-Dt$ 这样一个复合变数表現的，即 $p=p(x-Dt)$，$v=v(x-Dt)$等等。

在 t 瞬間，所有各量在 $x=Dt$ 处之值就等于 $t=0$ 瞬間在 $x=0$ 点处之值。这就是定型推进。

先算一下 β 的总导数：

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{\partial\beta}{\partial t}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{dx}{dt}=-(D-w)\frac{\partial\beta}{\partial x}.$$

这是根据定义$\frac{dx}{dt}=w$以及β仅决定于$(x-Dt)$这个复合变数而得出来的。一般地說来，$dt=-\frac{dx}{D-w}$。用上这个关系式就可以按下式求出β随x的变化来：

$$x=\int-(D-w)dt=\int_{\beta}^{1}\frac{(D-w)d\beta}{\beta^{\nu}f(T',p')}=\int_{\beta}^{1}\frac{(D-w(\beta))d\beta}{\varphi(\beta)}.$$

按方程(9.6)，函数$\varphi(\beta)$是已知的。因此，这个积分，在原則上說来是可以算出来的，然后求出表为x的函数的β来，通过β就不难按(9.2)，(9.4)，(9.5)把p, v, T表示出来了。

在反应区内这四种量的一般分布踌綫表示在圖16, a, б, в, г上。

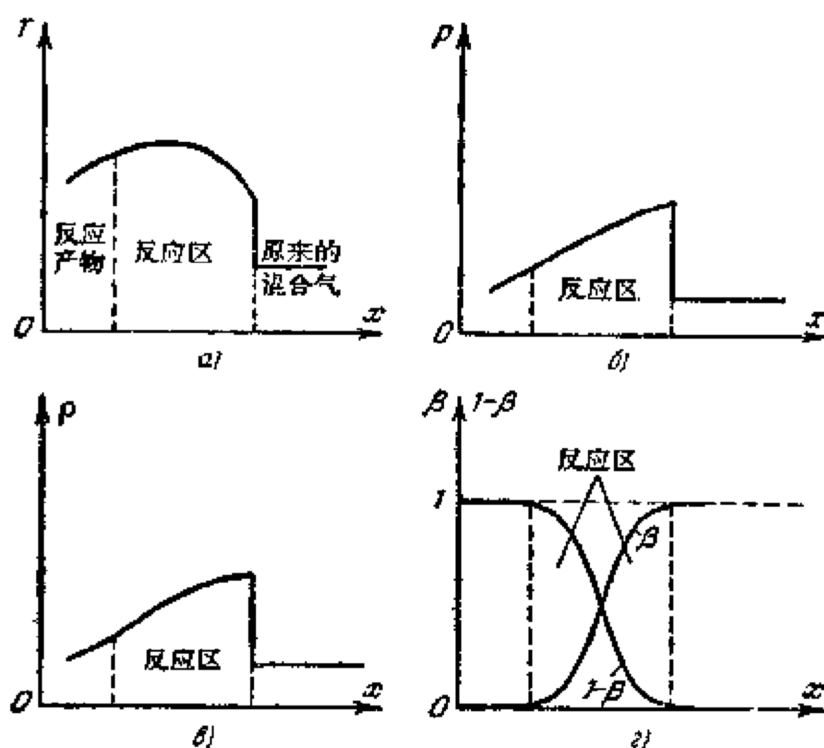


圖 16.

我們已經看到了，当β很小时，$\varphi(\beta)\sim\beta^{\nu}$。因此，如果积分及于$\beta=0$，即它就是积分的下限，而得無限大的波剖面宽度。这就是

的确，只要作出函数 $\frac{1}{\varphi(\beta)}$ 对 $1-\beta$ 的曲綫，便得类似圖 17 那样的曲綫。很貼近波头处，那里的 $1-\beta\ll 1$，这个函数下降得十分快，这是由于(9.7)式右側那个具有指数的乘数下降得很快的緣故，而在 $\beta=0$ 附近，这个函数上升达無限大。不过事实上，在爆震情况里升达無限大这一段并不存在，因为損失不允許反应眞正进行到底。

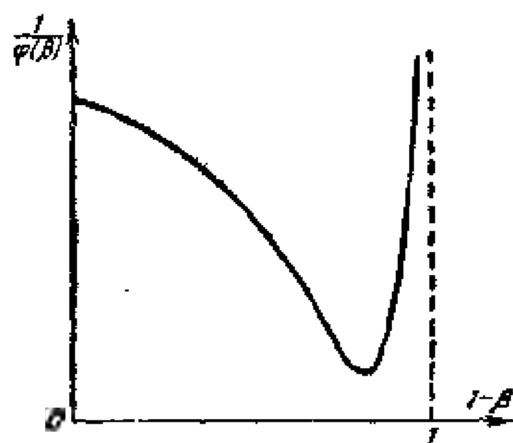


圖 17.

自然，爆震波的厚度是应按 $\beta=\beta_0$ 去决定的，这个 β_0 在 $\frac{1}{\varphi(\beta)}$ 曲綫的最低点之右，因为实际的反应只进行到这些数值。这样求出来的爆震波全部厚度等于

$$x_0=\int\limits_{\beta_0}^{1}\frac{(D-w(\beta))d\beta}{\varphi(1)\exp\left\{\frac{A}{T'^2}\left(\frac{dT}{d\beta}\right)_{T=T'}(1-\beta)\right\}}.$$

这里利用了这样一个事实：函数 $\frac{1}{\varphi(\beta)}$ 下降的主要部分决定于該曲綫的起始段，在这些地方导数 $\frac{dT}{d\beta}$ 是負的。

这样，在 $\beta=1$ 那一点上，我們就可以把积分号內的一切非指数因数全提到积分号外来，而积分便可以假定进行到 $\beta=-\infty$。于是得

$$x_0=\frac{D-w(1)}{\varphi(1)}\frac{(T')^2}{A}\left(\frac{d\beta}{dT}\right)_{T=T'}\qquad(9.14)$$

$\varphi(1)\frac{A}{(T')^2}$ 这个量等于起始的反应速率对温度的导数。这个量主要决定反应区的整个厚度。这与乘数 $e^{-\frac{A}{T'}}$ 有关，后者对溫度的变化是極敏感的。在通常的条件之下存在的爆震波，其 $x_0\sim 1$

厘米，或更小些。

在爆震極限上，波头应該拉得很厚，这种爆震是非定型的，并产生旋爆的現象（参看 § 14）。

§ 10. 化学反应的各种可能推进情况

这节里我們要研究一下一种給定的原始混合气，其化学反应一共有哪些可能的推进情况。假定每次反应都一定进行到底，放出同样的热量 Q 来，并形成同样的反应产物，在这样的假定之下我們便得到一条一定的代表終了情况的雨貢紐絕热綫，这条絕热綫是我們在前一节里講爆震速度的決擇时已經研究过了的。

如果由于某种原因这个决擇速度不能实現的話，那末，前面已經指出过，爆震可能以其他的速度进行。最后，除爆震外，还可能存在火焰的緩慢推进。但，無論它是爆震波还是火焰的緩慢推进，总可以就起始狀况及終了狀况建立那几条守恒律的。Q 旣然永远一定，絕热綫便是完全确定的一条綫。

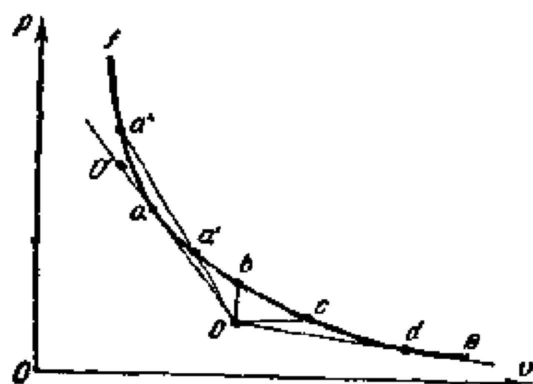


圖 18.

我們这里就一种在燃燒前原始狀况完全給定的气体研究它一切可能的变化情况。圖 18 上的 O 点代表起始狀况。a 点代表在大直徑光滑管中的爆震情况。a 点以上的各点代表过度压縮的爆震波。这些情况是在爆震波后不讓膨脹波形成时实現的，例如用活塞或其他的方法压縮反应产物就能实現。

显然，活塞为了进行压縮而必需的最低速度得等于介質在 a 点的运动速度 w。

一般地說来，圖 18 曲綫上每一点 a'' 都可以單一地用一个一定的速度值 w'' 来代表，只要 a'' 在 a 之上，这个 w'' 是大于 w 的。据此，一般地說来，总可以为某种爆震情况找到它的当量活塞速度（但不是波速 D，因为每一个波速一般地对应于兩种情况：一个是"压縮不足的爆震波"，另一个是"过度压縮的爆震波"）①。

最小的速度，按气体中的爆震方程，为

$$w=\sqrt{2\frac{k-1}{k+1}Q}=\frac{D}{k+1}.$$

对于可炸混合气，曾取 $k=\frac{8}{7}$，$D=2800$ 米/秒，于是所需要的速度 w 是 1300 米/秒。如用实在的活塞这是难以达到的。艾瓦佐夫（Б. В. Айвазов）和澤尔道維奇② 逼使爆震波从粗管轉入細管，而在細管中得到了过度压縮的爆震波，这是靠粗管变細管处的反射，使粗管中有較高的压强而得到的。

我們在这里說一下他們用来求过度压縮的爆震波中各項參数的方法。計算指明，当爆震波由粗管进入細管时（在 $2H_2+O_2$ 的混合气中），在細管中应产生过度压縮的爆震波，其压强等于正常爆震波的 1.36 倍。同时过度压縮的爆震波的速度等于正常爆震波的 1.04 倍。速度上这一点差别是在量測的誤差之内的，不可能精确地求出。为了証明由粗管进入細管后，爆震波确是过度压縮的，他們做了一种实驗使过度压縮的爆震波与正常爆震波互撞，并記录互撞的情形。过度压縮的爆震波与正常爆震波中的压强差別，产生了很不对称的反射現象，这在記录上看得很清楚。根据兩反射波的速度之比，不难推算出过度压縮的爆震波中的压强来。

---

① "压縮不足的爆震波"和"过度压縮的爆震波"这兩个名詞譯得不見得妥当，有的地方似以譯作"未加压縮的爆震波"和"經压縮过的爆震波"較妥。請讀者注意 ——譯者注。

② 艾瓦佐夫和澤尔道維奇合著："在收縮管内产生压縮爆震波"，实驗物理及理論物理杂志，17, 889, 1947。

压縮很强的时候，爆震波推进中的放热作用必逐漸减小。維持震波所必需的能量將靠波后的压縮功来供給。例如压縮可炸混合气的活塞速度比 1300 米/秒大得多的时候，情况就是这样了气态的反应产物的雨貢紐絕热綫，按方程（8.2）可以知道，它在 $v=\frac{k-1}{k+1}v_0$ 时具有一鉛直的漸近綫，这一点是气体中任何震波所共有的。因此，絕热綫最高一点对应于最强的震波，其推进速度决定于波头后面的运动。

由 a 点至 b 点各情况，其速度也都大于最小速度，但压强小于 a 点的压强。这些情况可以用人工的方法使它实现，使反应速度大于 D，但不妨碍反应产物的膨脹，例如可以沿管長連續地用电火花点燃混合气。只要管子尺寸选得恰当，就能使每一火花燃点所放出的能量要多么小就多么小，这个小是对單个火花点燃一部分混合气所释放的能量而言的。这样一个想像的实驗，我們要加上的唯一条件是，不論在哪里，反应一旦开始后必进行到底，即凡有尚未起反应的介質之处必繼續进行下去。

燃点混合气的連串火花推进的速度可以大到使爆震波赶不上，这爆震波是指在混合气中自由推进的爆震。这样的一連串火花便能强迫混合气以一定的速度进行反应。不过我們得假定，这些火花只是起引發反应的一个机構的作用，它本身的能量是可以略去不計的。

反应的波头形狀可以是破折的，但只要控制面选在完全未反应之前及完全燃燒完畢之后，那末就管截面的平均值来写質量守恒、动量守恒和能量守恒三定律的話，就能得到雨貢紐絕热綫 $abcd$ 的方程。这些情况的压强都低于 a 点的压强，因为現在未反应的气体来不及像較慢的爆震波那样有力地压縮已經反应过的气体，在較慢的爆震中，气体在进行反应之前是已經被压縮过了的。

任何一种狀况的推进速度之平方是与 O 点（起始点）至絕热綫

上对应点之連結綫的斜率成正比的，符号正相反。因此，給定一个推进速度（例如用一系列的火花强迫規定它一个推进速度），我們就可以簡單地按 a' 点的坐标求出完全燃烧之后反应产物在管截面上的平均 p, v 值。同一推进速度的过度压縮的爆震波，其反应产物的狀况是按 a'' 点的坐标計算的。

但研究了燃烧波头之后的反应产物就知道，如果是用一系列的火花点燃的，而沒有活塞压縮的話，存在的情况必是压强較低的 a' 点（这种情况的 $D'>w'+C'$），而不是过度压縮的爆震波。

在 § 9 里我們研究了正常爆震波中化学反应的內在机構，知道在 (p, v) 圖上，爆震的混合气在反应时的轉变次序是这样的，經震波的压縮，瞬間內由 O 突躍至 O'，这时反应还沒有来得及开始，然后压縮了的混合气再变为反应产物，这期間气体由 O' 点沿 $O'a$ 綫段膨脹到 a 点（圖 19）。在压縮到 O' 点时，可爆炸的混合气溫度提高到引起了这个燃烧的化学反应；在管內，反应的时間和反应地区的厚度与反应速度成反比。

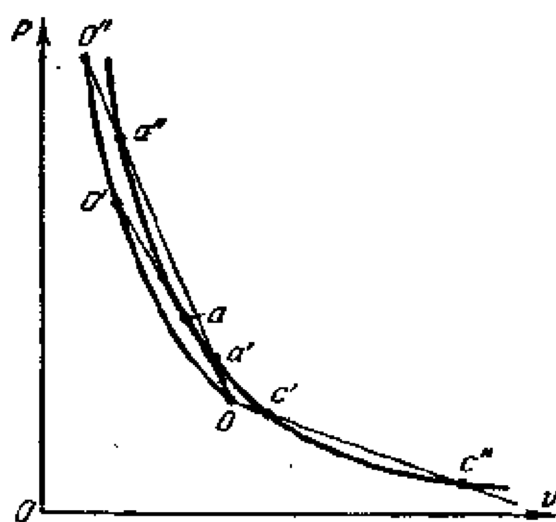


圖 19.

过度压縮的爆震波就其內在机構說来，与正常的爆震波并沒有什么不同：在 (p, v) 坐标上，原来的混合气为震波压縮到 O'' 狀况，这以后才到 a'' 狀况；从 O 突躍至 O'' 之后，即連續地沿 $O''a''$ 綫段膨脹下来。与过度压縮的爆震波的更高速度（$D'>D$），及更大波幅相对应的是，它的反应进行得比正常爆震为快，反应区比正常爆震波为狹。反之，压縮不足的波，其变化是不經过突躍压縮的阶段的。在等速下压縮不

足的波中，物系的狀况变化是直接由 O 沿 Oa' 綫段到 a'，而無突躍的。

某种可爆炸的混合气，在原始狀况下，例如在室温及一个大气压下，本来化学上是不活躍的，要它产生由 O 至 a' 的反应，就只有用外来的人工燃点才有可能进行；这样的外来燃点也就規定了过程的推进速度 D'。

严格說来，用一連串火花来燃点时，眞正的圖景并不是一元的：在火花作用之后不久，管子的每一指定截面上，圍繞着火花發生地点必有一部分区域已为反应产物所占据，其他部分則仍是可爆炸的混合气。化学反应不像正常爆震那样，在整个管截面上同时进行，而是在反应产物与混合气的分界上进行的，管截面上反应产物所占的部分逐漸扩大，原始混合气所占的部分則逐漸縮小。同一截面上各点的压强实际上是同一个数值；压强由火花剛通过，过程剛开始时的 p_0 变到該截面上反应完畢时的 p'_a。但同一截面的不同部分，反应产物与原始混合气的比容、温度、和气体移动速度是很不相同的。可以这样說，在反应中气体的比容沿 Oa' 直綫变化，这說的是指定截面上气体的平均比容的变化，这个比容是适当地按該截面上兩部分的比容之平均值計算的。

这种压縮不足的快燃波存在的可能性，我們說是同外界的人工燃点法分不开的，因为旣不是用震波来燃点，而产物到新鮮混合气之間的分子傳熱（卽緩慢燃燒的机構）又不能保証給这种推进以足够高的速度。

在原則上可以設想有这样的一种反应推进机構（这是十九世紀末二十世紀初提出来的观点），这种反应推进机構是与光的电子傳遞或光的量子傳遞有关的：在反应中形成光的电子或光的量子，这种光电子或光量子傳播开来，引起前面尙未进行反应的一層混合气發生反应，这样一步步傳开去。这样的一种燃点机構能使燃

烧的推进速度大于 D,同时在自然条件之下,無外界燃点时，压縮不足的爆震波可以存在。

但在实际上,我們知道，在一个大气压下,爆發时变为輻射能量或使电子飞脫并加速的那部分反应能量仅占全部化学反应能量的極小一部分。同时,在原始条件之下,可爆炸的混合气在化学反应上相当不活躍,要它起化学反应，需要很大的能量集中;所以在实际上,这种燃烧机構是不存在的。

因为一个接一个燃点火花的速度可以任意快，这一切燃烧情况都必在 b 点之左(圖 18)，b 点是过原始狀况 O 点的一条鉛直綫与絕热綫的交点。凡是可以称为爆震的情况(与緩慢燃烧的情况不同)，其推进速度必大于 D。在 b 与 c 兩点之間的那些点,不代表任何一种定型情况,因为那些点所对应的是虛的推进速度:向 bc 段上任何一点引一直綫,其斜角之正切都是正的,于是推进速度之平方变成了負値。

由 O 作一直綫至 cd 綫段上任何一点,都代表一种实际存在的情况,不过这时是緩慢燃烧,其推进速度同 D 比起来是極小的。燃烧速度比音速低得多，因此燃烧时由于加热而产生的一切压强变化都来得及傳到未燃混合气里去,并得到拉平,在火焰头上便沒有显著的压强变化了。

火焰的推进靠反应产物把热量傳給未燃的混合气，也靠活躍原子以及活躍根在不活躍气体中的扩散。因此，緩慢燃烧的推进速度与分子交混过程中的速度是大有关系的。通常燃烧速度是与反应产物中的音速被反应所需的碰撞次数 n 的方根所除而得的数値同一数量級的:

$$D_{燃烧} \approx \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

大家都知道，音速是与分子速度同一数量級的。碰撞次数的

平方根这个値則說明在碰撞时間內分子在無秩序运动中自由行走的距离。因此，燃燒速度就与分子在进行化学反应所需要的时間內所移动的距离値同一数量級。

通常这个速度（每秒几米）所对应的直綫在 Oc 之下十分接近于 Oc 綫。但無論如何，燃燒速度不会大于絕热綫的第二条切綫 Od 的斜率所代表的速度，因为在 d 点之右的那些点，連起直綫来，其斜率已小于 d 点之斜率，这些点就不代表任何一种可能情况了，因为連結綫有一部分会高于絕热綫，这就要求在反应过程中放出比最大热量还要多的热量来。

从質量守恒律和动量守恒律可以得出以下的結論：在緩慢燃燒中，介乎起始混合气与反应产物之間的中間狀况，在 (p, v) 圖綫上，也应落在 O 点与絕热綫上那一点的連結直綫上，絕热綫上这一点就是代表燃焰推进速度的点，例如 c' 点。

燃燒与爆震不同之处在于，燃燒时，在 O 点附近气体狀况的变化不是决定于該狀况之下極緩慢的化学反应速度的，而是决定于未燃混合气所受到溫度已提高的貼鄰層傳来的热量的；火焰推进速度本身，如前述，則决定于傳热及化学反应速度。

澤尔道維奇就定压下最簡單的以低速推进的火焰，研究了它的反应放热及傳热之后[①]証明，在火焰中，溫度只能作單調的变化，由 T_0 变至 T_d，而不可能具有極大値。就熵說来，情况也是这样[②]。由此可以得出这样一个結論来：在 d 点以下的 c'' 点是燃燒所不能达到的，因为按圖 19 看来，要达到 c'' 点，由 O 所作的直綫必經 $c'c''$ 段，而在这一段上，熵的値是大于 c'' 点的熵値的。

① 見澤尔道維奇及札連博(К. С. Зарембо)合著："汽油燃焰結構之研究"一文，物理化学杂志，22, 427, 1948。

② 有一点是十分清楚的：如果反应的进行，沒有热量从一部分气体傳到另一部分去的話，那末在反应过程中，熵使單作單調上升。重要的是，在定型情况下，傳熱并不破坏某指定气体微团之熵作單調上升的規律。

归結起来，我們便可將整个絕热綫划分为五段(圖 18)：

1. d 点之右，根据动力学的推理，知道那些情况是不存在的。

2. 由 d 至 c 是緩慢燃燒段，而且 d 点是緩慢燃燒中最快的燃燒。

3. 由 b 点至 a 点是压縮不足的爆震波，而且 a 点的推进速度是其中最低的。

4. a 点以上是过度压縮的爆震波。

5. 由 c 点至 b 点不存在定型的情况(速度是虛数)。

所以，有最大燃燒速度和最小爆震速度存在，在这兩者之間是空白，其对应的定型过程的推进速度是不可能存在的。可以証明，最大的燃燒速度是与 $\frac{1}{\sqrt{Q}}$ 成正比的，而最小的爆震速度則与 $\sqrt{Q}$ 成正比。所以这兩种速度之間的空白是很大的。

現在我們来求切綫 Od 所对应的速度，卽最大的緩慢燃燒速度。为了簡單起見，凡是可能的地方我們都假定原始的比容同 d 点的比容作比較是可以略去的。

在这样的近似前提下，絕热綫方程变成：

$$\frac{k}{k-1}pv-Q=\frac{1}{2}v(p-p_0).$$

在 d 点，相切的条件可以写为：

$$\frac{p_0-p}{v}=k\frac{p}{v},$$

由此得

$$p=\frac{p_0}{k+1}.$$

把这个 p 值代入絕热綫方程，得

$$vp_0=2Q\frac{k-1}{k}.$$

d 点的推进速度 D_1 之平方等于：

$$D_1^2=kv_0^2\frac{p}{v}=\frac{k^2p_0^2v_0^2}{2Q(k^2-1)},$$

于是D与D_1之間便有这样一个簡單关系存在:

$$DD_1=kp_0v_0=c_0^2.$$

在d点,气体的速度w_1与D_1之間的关系仍是$D_1=w_1+c_1$,不过这里的$c_1>D_1$,而w_1的符号便与D_1相反。同时，在爆震波里$\rho>\rho_0$,其w的指向与D相同,而在燃燒时，$\rho<\rho_0$,气体速度的指向与波头推进方向适相反。

以可炸混合气来說,当$T_0=300°K$时,

$$c_0^2=\frac{8}{7}\times\frac{8.3\times10^7\times300}{12}=$$

$$=\left(49000\frac{\text{厘米}}{\text{秒}}\right)^2,\ D_1=\frac{49000^2}{280000}=8500\text{ 厘米/秒。}$$

同前面一样,这里假定 $k=\frac{8}{7}$, $M=12$, $D=2.8\times10^5$ 厘米/秒。

实际上，普通燃燒时D_1这个速度是不出現的,实际得到的是一个慢得多的速度。但可以指出，以D_1速度推进的那种情况是可以存在的。

关于这点,詳細研究放在下一节里。这里我們只想指出，d点的狀况对原始狀况O点的关系，完全同a点对O'点的关系一样，在O'点混合气已經受强有力的震波压縮过了,然后爆震波中的化学反应从这里开始。換句話說,可以証明,經推进速度为D的震波压縮过后的混合气,其最大燃燒速度便是爆震速度D。

这里首先我們看到，a和d兩点是从O'和O兩点作切綫决定出来的，O'和O兩点所代表的是同一成分的混合气，切綫都是向同一条絕热綫$abcd$作的。

在(p,v)面上,O,a和O'三点在同一条直綫上，而且，如果說O'点的狀况是由O的狀况經震波而达到，d点的狀况是由O經化学反应而达到的話，那末，a点的狀况也就是由O'点經化学反应而达到的了。对O'說来a点的推进速度,正好是使全部运动定型

所需要的速度。

我們要証明，如果 O 和 O' 兩点是用震波的雨貢紐絕热綫連結的話，而 O 和 a 是用爆震波的絕热綫連結的話，那末 O' 和 a 兩点也是用絕热綫連結的，也就是說，像 O, d 兩点一样，是用質量守恒、动量守恒和能量守恒三方程联結的。

O, a 和 O' 三点既在一条直綫上，因此

$$\frac{p_{O'}-p_O}{v_O-v_{O'}}=\frac{p_a-p_O}{v_O-v_a}=\frac{p_{O'}-p_a}{v_a-v_{O'}}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

式中的 α 是这条直綫与 v 軸之間的傾角。$\operatorname{tg}\alpha$ 这个値与質量密流有关，卽与單位时間內流过單位面积的質量有关。

在与波头共进的坐标系上，未經扰动的气体具有速度 $(-D)$。所以它的質量密流 j_O 等于 $-\rho_O D=-\dfrac{D}{v_O}$。但我們知道

$$D^2=v_O^2\frac{p_{O'}-p_O}{v_O-v_{O'}}$$

或

$$j_O^2=\frac{D^2}{v_O^2}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

可見，三个質量密流値彼此是相等的，这也正是定型运动条件所要求的。如果由狀况 O' 至狀况 a，質量密流小于由 O 至 O' 的質量密流，那末在 O' 就应有質量堆积起来。

現在要証明，根据質量密流相等的关系，O' 和 a 应为雨貢紐絕热綫所連結。

就 O' 和 O 兩点来說，用質量密流来表示的話，三条守恒方程可以写为

$$\rho_O D=\rho_{O'}D_{O'}=j_{O'},$$

$$p_O+j_O^2 v_O=p_{O'}+j_O^2 v_{O'},$$

$$H_O+\frac{1}{2}j_O^2 v_O^2=H_{O'}+\frac{1}{2}j_{O'}^2 v_{O'}^2.$$

同理就 O 和 a 兩点也可列下类似的三个方程，而且 H 应包括

一切焓在內，其中包括化学能:

$$\rho_O D=\rho_a D_a=j_O,$$

$$p_O+j_O^2 v_O=p_a+j_O^2 v_a,$$

$$H_O+\frac{1}{2}j_O^2 v_O^2=H_a+\frac{1}{2}j_O^2 v_a^2.$$

比較这兩組方程的右側，得:

$$\rho_{O'} D_{O'}=\rho_a D_a=j_O,$$

$$p_{O'}+j_O^2 v_{O'}=p_a+j_O^2 v_a,$$

$$H_{O'}+\frac{1}{2}j_O^2 v_{O'}^2=H_a+\frac{1}{2}j_O^2 v_a^2.$$

这就証明了，在完全燃燒，O' 和 a 确实是为雨貢紐絕热綫的各方程所連結的。

試以狀况 O' 为原始狀况，作出完全燃燒的整条雨貢紐絕热綫。这条曲綫絕不会同以 O 为原始狀况的完全燃燒的絕热綫相合。絕热綫的形狀与原始狀况大有关系。但正如我們剛才証明过的那样，a 点为兩条絕热綫所共有。有待于証明的是这兩条絕热綫在 a 点具有一共同切綫。

直到現在为止，我們的一切論証里还沒有假設: OaO' 直綫与以 O 为原始狀况而作的絕热綫相切。这条絕热綫与直綫 OO' 的任何一共同点，也必在以 O' 为原始狀况的絕热綫上。

所以，如作 $Oa'a''O''$ 直綫，使其交以 O 为原始狀况的絕热綫于 a' 和 a'' 兩点，那我們就可以确信，以 O'' 为原始狀况的絕热綫也必經 a' 和 a'' 兩点。但如果是一种自由的爆震波，后面既無压縮，也沒有人工的燃点机構，那末，以 O 为原始狀况的絕热綫上 a' 和 a'' 这兩点必合而为一点。

但这兩点始終是在以 O' 为原始狀况的絕热綫上的，所以当这兩点合而为一时，直綫 OaO' 便应与絕热綫相切了，这一点是前面

已經証明过了的。第二条切綫(下面一条切綫)，是从原始狀况作起与完全燃燒的絕热綫相切的一条切綫，它代表最大的燃燒速度 $D_{最大}$。

这样我們就証明了，爆震波中化学反应的进行情况，是同混合气为震波压縮至 O' 点之后，以最大速度燃燒的情况一样的。同时 O' 点的已压縮混合气相对于未压縮混合气的整体运动速度恰等于已压縮混合气相对于反应产物的整体运动速度。

§11. 强迫燃点速度之下的燃燒

以上我們研究了化学反应作定型推进的一切情况，幷發現了，有一段推进速度是不屬于任何定型情况的。但在前一节里已說过，有可能强迫气体的化学反应以任何速度来推进，例如用一連串的小火花来燃点混合气；在§10里，假定混合气在給定的原始狀况下也是靜止的。

在假想的用人工規定任意燃点速度的实驗里，管中靜止的混合气具有給定的原始狀况，事先規定的只是在实驗室坐标系上的推进速度値，也就是規定火焰相对于管壁的推进速度，或說相对于当时处于靜止狀况的可爆混合气的推进速度也一样。显然，如果火焰的推进速度不是十分迅速的話，火焰將扰动它前面的混合气，改变它前面混合气的密度、压强，幷給混合气以移动速度。結果，进行反应的便是已有运动的混合气了，其狀况已与原始狀况不相同。

假定用人工火花或别的法子，賦予管中的反应(燃燒)推进速度以某定値，那末單是这个速度还不能用来經原始狀况 O 点作出直綫

$$p=p_0+\frac{D^2}{v_0^2}(v_0-v),$$

按这条直綫与所貢組絕热綫的交点去定出反应产物的狀况来。正如我們已經看到的，这样的交点并不一定存在，例如当 D 小于最小的爆震速度，而大于最大的燃燒速度时，就不存在；这个范圍里的速度所帶来的补充能量要多么小就多么小。除火花外，还可以用爆發引綫，假定引綫所释放的能量同混合气的能量比起来是極微小的。

这样的强迫燃燒（燃燒面与管軸相垂直）能賦予火焰以完全确定的推进速度。但無論如何，任何截面上的混合气必經一定的时間 t_0 才能燒完。在这段时間內，燃点的动作已經前进了 Dt_0 距离，这个 D 是給定的燃点速度。因此，Dt_0 这个値是表征火焰厚度的。

把三条守恒定律用于已燃气体和未燃气体，我們总可以在火焰前后划定控制面，假定火焰厚度为 Dt_0。

所以，只要时間很長，管子够長，那就可以存在任何指定推进速度（自然的，或人工的）的燃燒。

乍一看，这似乎与前一节的結論相矛盾，前一节說在最大燃燒速度与最小爆震速度之間有很大一个速度范圍是不可能存在定型的反应推进的。

但应該弄清楚，这里的問題是，对原始的混合气（这原始混合气在計算时假定是靜止的）說来，給定的推进速度是否可能。

实际上需要解决的是一个复杂得多的問題，关于火焰之前的气体运动問題，关于运动混合气的燃燒問題。本节就是要解决这个問題的。

在管子里，气体受热，膨脹，必生运动，因此，一般地說来，燃燒情况与燃燒究竟是在端头封閉的管子里进行的还是在开口管子里进行的大有关系。如是封閉的，那在管子端头处气体的速度必等于零。如是开口的，燃燒华亞音速推进时，开口端的压强必与外界压强相等。封閉的情形已有澤尔道維奇和蕭尔金（К. И. Щел-

кин)[1] 于 1940 年做过近似的分析。

甘杰尔曼(Г. М. Гандельман)按我們的建議，在本書里对这兩种情形做了計算：第二种情形是重新計算的，第一种情形算得更精确一些。因为概括的公式可能太繁，就取了下列各常数值：

$$c_v=5,\ c_p=6,\ Q=45,$$

这里比热的單位取为一克混合气的气体常数，反应热的單位取为 $\frac{p_0}{\rho_0}$，即以原始压强为原始密度所除而得的商作为單位。p_0 和 ρ_0 这兩个値也取为單位。

先研究火焰在端头封閉的長管中的推进情况。假定起先火焰的速度很低。加热使气体的压强升高，压强升高在气体里以未扰动气体中的音速在推进。火焰前面的压强分布情况与活塞作緩慢推进时活塞前面的压强分布完全一样。

虽然运动圖景整个說来并不是定型的，但如引用这样一个变数 $\xi=\frac{x}{t}$[2]，那末对这个变数說来，压强分布便是不变的了。事实上，將 $x=Dt$ 代入，我們就会找到火焰的位置，于是 $\xi=D$。由因次理論得知，一切具有速度因次的量与坐标的关系必是通过 $\frac{x}{t}$ 这一复合量的，因为在这个問題里这一因次再沒有其他組合法了。如果震波的速度是 D_1，那末震波的坐标便是 $x_1=D_1t_1$，用新变数 ξ 来表示，震波的位置永在 $\xi=\xi_1=D_1$。这就是一种自型运动（参看 § 7）。

只要速度 D 小于燃燒产物中的音速 c_2，火焰之后气体的压强和速度都来得及自己拉平，但因封閉端头处气体运动速度为零，那

(1) 巴姆-澤里柯維奇(Г. М. Бам-Зеликович)編："理論流体动力学"論文集第四卷，苏联国立国防工業出版社，1949；还有謝道夫著："力学中的相似法及因次法"，苏联国立技术理論書籍出版社，1954；澤尔道維奇著："論爆震产物中的压强及速度分布，特别着重球面爆震波中的分布"，实驗物理及理論物理杂志，12，1 389，942 頁。

(2) 参看澤尔道維奇著："震波理論及气体动力学引論"，苏联科学院出版社，1946，§ 6。

末火焰之后整个区域里的运动速度便都得为零了。圖 20 是对变数 ξ 而言的压强分布示意圖。

圖上的 *0* 代表原始混合气，*1* 代表为震波压縮过后的混合气，*2* 代表燃燒产物。只要 D 值小于 3.22（这正是 c_2 的值）[①]，压强分布和速度分布便总是这个样子的。如果 D 大于 c_2，那末在 2 区里便应有膨脹波存在，这是因为在燃后气体中，扰动是以速度 c_2 傳播的，这样封閉端头处速度为零这一扰动就来不及使火焰上的速度为零。在 2 区中的膨脹波，对 x, t 变数說来并不是定型的，但对变数 ξ 說来，它的形狀是固定的。压强分布的形狀大致像圖 21 那样。

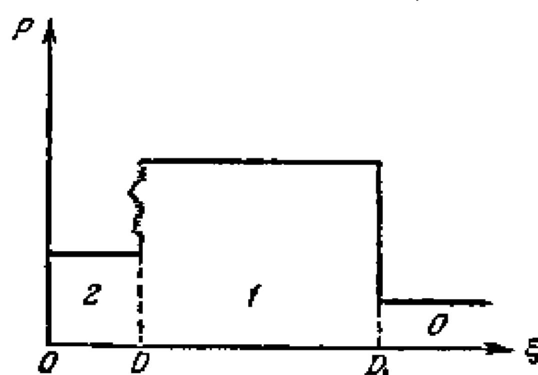


圖 20.

后面圖 26, *a* 上表示震波推进速度 D_1（相对于末扰动气体的速度）作为 D 的函数的变化关系，也就是 D_1 随給定的燃点速度（相对于固定坐标系的速度）的变化关系。只要 D 小于 6.48，火焰前整个的燃点圖景就一定是非定型的。緩慢燃燒的最大速度 $D=0.2$ 也是包括在內的，沒有任何东西把它划分出来：無論較这个 D 值为快或慢的 D 值在性質上都符合于非定型的运动

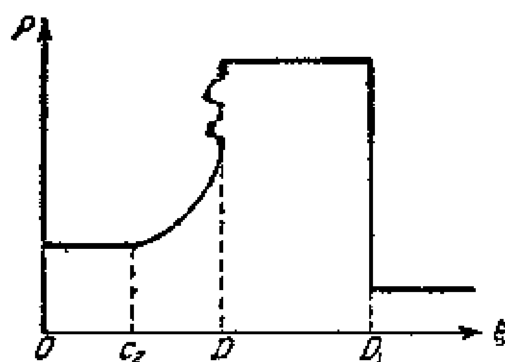


圖 21.

① 如果 p_0 和 ρ_0 都定为 1，則速度的單位便等于 $\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}=\frac{c_0}{\sqrt{\frac{6}{5}}}=0.9\,c_0$。按这些單位計算，$D_{最小}$（爆震的正常速度）等于 6.48，緩慢燃燒的最大速度等于 0.2。

圖景。

假定有一种燃燒，它的推进速度大于最大的緩慢燃燒速度，而小于最小的爆震速度。那末火焰对于已被震波压縮过的气体而言，其相对速度必小于該气体的最大燃燒速度。已压縮气体的最大燃燒速度，当然与未压縮气体的最大燃燒速度不相同（参看§ 10）。此外，还得考慮到，已压縮气体是在运动的，因此，火焰相对于已压縮气体的速度，并不等于它相对于管壁的速度。

这个道理举个例子説明一下。設 $D=2$。按圖 26, б 的曲綫，可以求出这时震波中的压强 $p_1=5.4$。然后按公式（3.3）計算比容，得 0.272。震波中的溫度等于原始气体溫度的 1.47 倍。但因最小的爆震速度只决定于反应热量[参看(8.8)式]，而我們看到已压縮气体的热能增長得很少，我們就可以断言：对已压縮气体而言，最小爆震速度是同在原始混合气中一样的。在已压縮气体里，音速提高的比值是 $\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}=1.215$。所以已压縮气体的最大燃燒速度根据 $D_{最大}=\frac{c_1^2}{D_{最小}}$ 的关系，也作 $\frac{c_1^2}{c_0^2}=1.47$ 这样的比值变化，比 0.3 略微小一些。同时，震波中的气体速度 $w=\sqrt{4.4\times0.728}=$ $=1.79$，而火焰相对于气体的速度便是 $2-1.79=0.21$，这个值小于該气体的最大燃燒速度 0.3。由此可見，相对于任何一种气体狀況而言，燃点速度永远不是小于最大燃燒速度便是大于最小爆震速度。企圖强迫它取中間的速度，在火焰之前必形成震波，这就是説，已压縮气体的燃燒才可以具有中間那一段的速度。

現在来研究 $D>3.22$ 的那种情形，即是研究火焰之后形成膨脹波的那种情形（圖 21）。

在火焰上应存在有这样的一个关系式 $D=w_2+c_2$，这个式子在膨脹波里仍是永远成立的。w_2 是紧靠火焰之后的燃燒产物的运动速度。在 c_2 点上（圖 21），$\xi=c_2$。所以，对于已压縮气体説来，

燃燒是这样进行的，卽同爆震波里一样：波相对于燃后产物的速度 $D-w_2$ 是等于燃后产物中的当地音速 c_2 的。这在圖 22 上看得很清楚；在这張圖上，下面那条絕热綫表示震波將气体由 (p_0, v_0) 狀况压縮到 (p_1, v_1) 狀况，而上面一条則表示以 (p_1, v_1) 为原始狀况的燃后产物的絕热綫①。

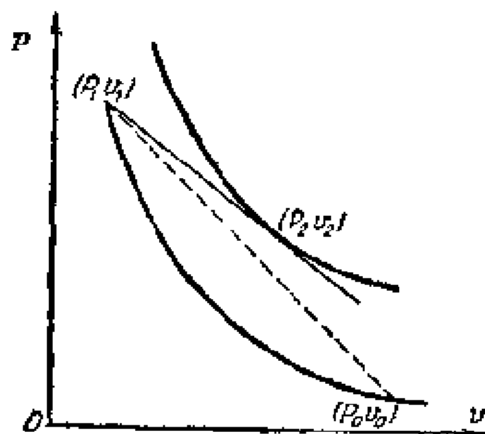


圖 22.

在这种情况下，震波中的压强 p_1，以及燃燒之后所达到的压强 p_2，都隨燃燒速度愈高而愈大。当 $D=D_{最小}$ 时，燃燒后所达到的压强便与按相切条件所决定的压强相等，p_1 等于 p_2 的兩倍（參看圖 19 的例子）。因为达到最高压强的区域的厚度，卽 $(D-D_1)t$，是隨 D 向 $D_{最小}$ 接近而变小的，所以最大的破坏作用应在略小于 $D_{最小}$ 的 D_1 上达到。

$D-w_2=c_2$ 这个条件在圖綫上表現为直綫 $(p_1v_1;\ p_2v_2)$ 与上面那条絕热綫相切。这在爆震波的情形也是对的，不过爆震波的原始狀况也在这条直綫上。只要燃点速度小于爆震速度，直綫 $(p_0v_0;\ p_1v_1)$ 的斜率就大于直綫 $(p_1v_1;\ p_2v_2)$ 的斜率。因此，圖 20 上的 D 和 D_1 兩点并不重合，在 x 坐标系上，运动的情况是非定型的。其非定型性表現在 D 与 D_1 兩点之間的距离一直按 $(D-D_1)t$ 的規律在增加着。一塊混合气先为震波所压縮，然后在时間 t_1 內为火花所燃点，这塊混合气离管子的封閉端头愈远，这个 t_1 愈長。

事情很清楚，t_1 不是常数这一事实無論如何不允許我們把燃燒过程解释为是由震波压縮所引起的。如果混合气是为震波所燃

① 作这条絕热綫时，取 (p_1, v_1) 为原始狀况。这条絕热綫与直綫 $(p_1v_1;\ p_2v_2)$ 相切，但不与代表非定型情况的直綫 $(p_1v_1;\ p_0v_0)$ 相切。

点的，那末由压縮瞬間起至反应中間的任何阶段，应占同一时間，只要混合气的成分一样，混合气的原始狀况一样。只有当震波强度足够燃点混合气时，情况才会成为定型的。等到 $D_1=D$ 时，即燃点速度等于爆震速度时（在前举的数例上这个速度是 6.48），圖 22 上的兩条直綫便合而为一了，这就成了定型的爆震，定型爆震的推进就不需要燃点了。

如果我們想超过 $D=\sqrt{2Q(k^2-1)}$ 这个速度，而不在后面进行压縮的話，那还得用人工燃点。这时情况可以是完全定型的，火焰中的狀况为圖 18 上 ab 綫段上的点所代表。增大推进速度对应于狀况由 a 点向 b 点移近。速度超过 $\sqrt{2Q(k^2-1)}$ 的情况，其 p 和 w 的分布表在圖 23 上。

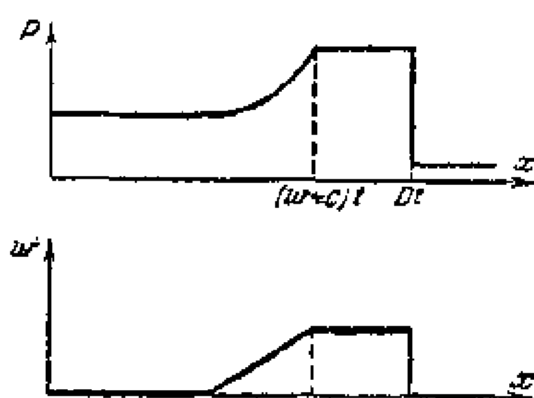


圖 23.

因 $D>w+c$，膨脹并不是在燃燒剛完馬上就开始的。这里要指出，用高于 $\sqrt{2Q(k^2-1)}$ 的速度作人工燃点时，燃焰的压强和速度都比正常爆震时为低，因为这是一种压縮不足的波。

現在来研究端头开敞的管子里的火焰推进問題。

这时，速度很低，应認为开口端的压强与外界压强相等（即 $p=1$）。在实驗室坐标系（即固定坐标系）上，速度 w_2 的指向与燃点速度 D 的指向恰相反。因此，差值 $D-w_2=D+|w_2|$。等到 $D=0.934$ 时，这个値变成等于 $c_2$①。

在这以后，火焰的后面形成膨脹波，这个膨脹波起先只占据火

① 在端头封閉的管子里进行燃燒时，燃后产物的速度 w_2 在实驗室坐标系上是等于零的，虽然，不論管端头是开敞的还是封閉的，燃后产物的速度对火焰之前的混合气說来，都是負的。

焰之后的一段管子，后来一直伸展到开敞端头去。反应产物的速度指向仍与 D 相反。速度分布的形狀如圖 24 所示(只要膨脹波未达开敞端头之前，速度分布总是这样的)。

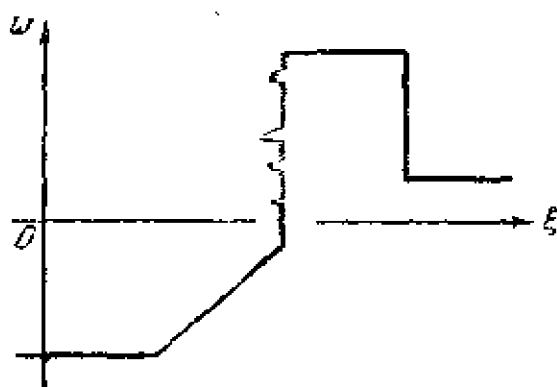


圖 24.

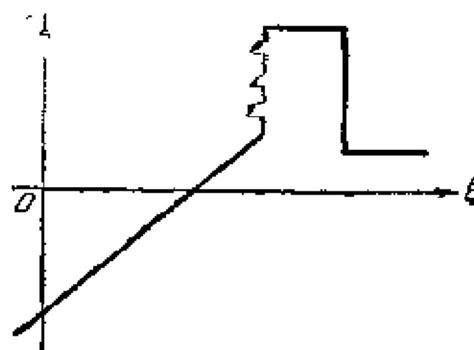


圖 25.

火焰后面的燃燒产物的速度为負，这一情况一直保持到 $D=$ $=3.22$ 为止。D 值再大的时候，速度分布便像圖 25 那样了。

等到火焰后面的燃燒产物的速度变成正之后，开口管子里的

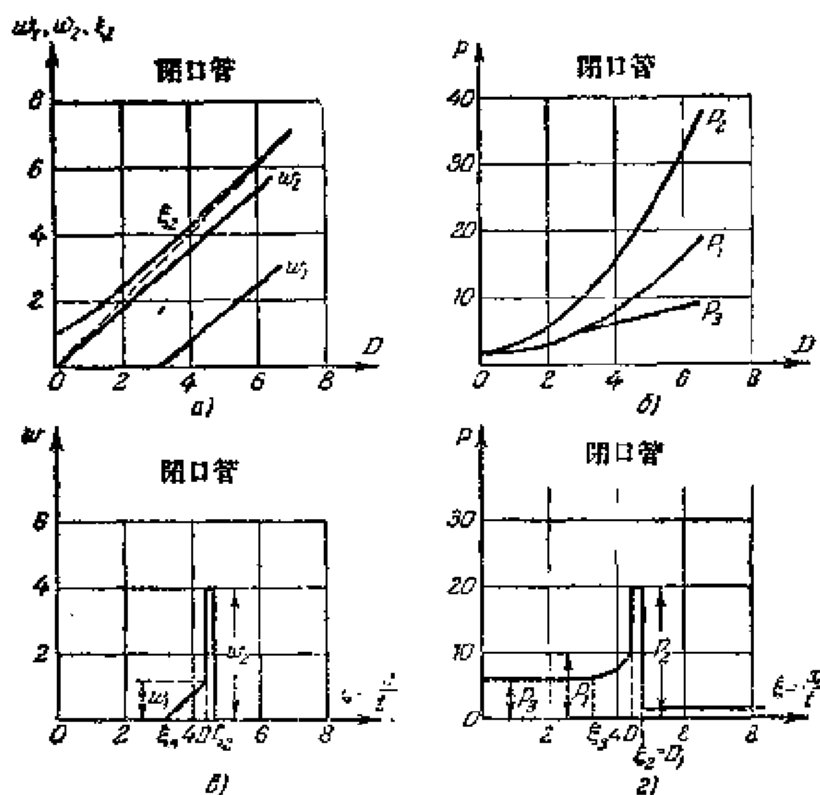


圖 26.

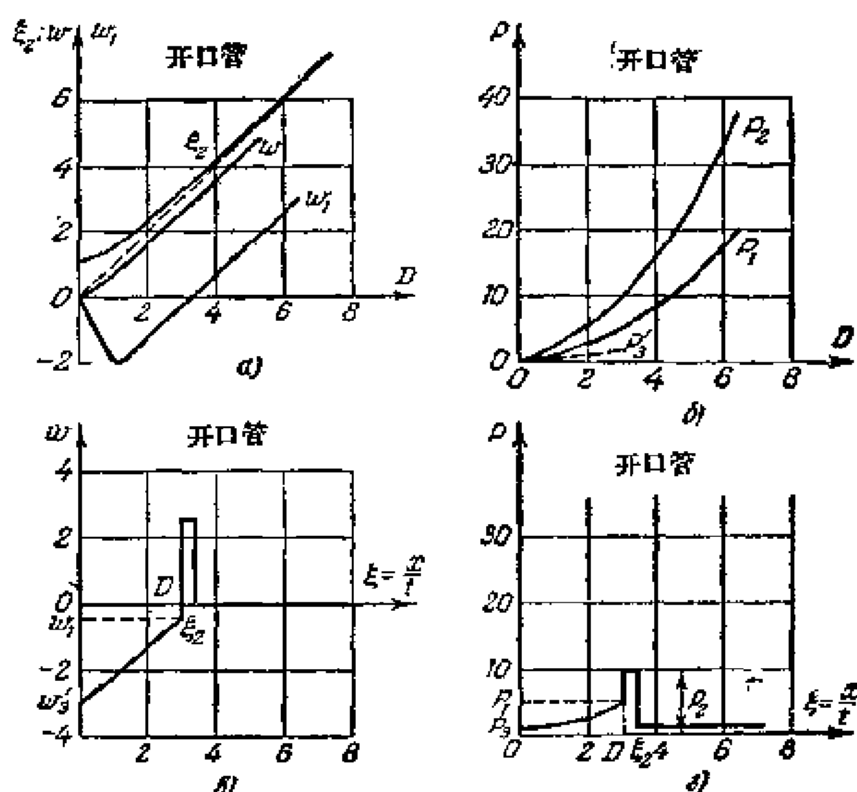


圖 27.

燃燒就与閉口管子里的燃燒沒有什么分别了（当然这是就火焰之前而言）。$D=6.48$时，就达到了定型爆震。

最后我們把甘杰尔曼的分析結果引在这里，計有速度和压强 w_1, p_1, w_2, p_2 对 D 的曲綫，以及对变数 ξ 而言的速度分布（圖 26, a—$г$, 圖 27, a—$г$）。下标 3 表示經过膨脹波之后的燃燒产物。上角的撇号（p_3', w_3'）表示这是开口管的一些物理量。

§ 12. 气流中的定型燃燒

現在我們来研究气流中的定型燃燒，假定表征流动的各参数进行連續的变化。同时，略去气流与包圍气流的管壁之間的傳热及摩擦。

圖 28 表示做这个实驗所用的設备。A 室中的可爆炸的混合

气处于定值压强之下。这我們不妨設想成为：压气机 B 不断供給空气，噴嘴 $Б$ 不断供給燃料，使 A 室中可爆炸的混合气的成分和压强都保持一定，尽管混合气在往外流。T 管与 A 室相接，混合气經 T 管的出口 O 流入大气。管中安上一个燃点用的“火花塞” C. 像內燃机里用的那种火花塞。

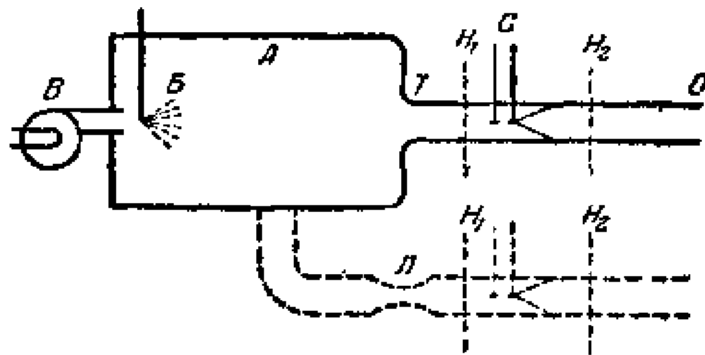


圖 28.

混合气达到 C 时燃燒起来，随着混合气的运动，火焰向右伸延，到了 H_2 截面管內流过的便只有燃燒产物了。假定火焰速度低于气流速度，因而火焰不会逆流向左伸延，在 C 之左的 H_1 截面上便只有起始混合气在流动而沒有一点燃燒产物。火焰成本生灯的錐狀焰，錐頂在火花塞 C 点。

圖下面用虛綫画的是在超音速气流中进行燃燒的設备。大家都知道，要想得到超音速气流，在气体靜止的貯气箱与作超音速流动的管子之間，必須有一个噴管 $Д$。

这里先說截面 H_1 上的狀况 (p_1, v_1, T_1) 和速度 w_1 与截面 H_2 上的狀况 (p_2, v_2, T_2) 和速度 w_2(燃后产物) 之間的关系。火花本身那点能量可以略去不計。在現在这个問題里，燃燒区“系”在火花塞 C 上了，对实驗室坐标系說来，燃燒区是靜止的。

显然，只要火焰头之前的狀况都是 (p_1, v_1, T_1)，而將火焰看作具有速度 w_1，那末一切关系便都与以前火焰在火焰头之前靜止的混合气中推进时沒有什么不同了。

反应前 H_1 截面上可爆炸的混合气原始狀况給定之后，燃燒后的一切可能狀况，在 (p, v) 面上都为雨貢紐絕热綫所代表。由于

现在这个問題里 H_1 截面上气体給定了流速，雨貢紐絕热綫与直綫的切点就应該这样去选取，使其切綫的斜率恰对应于速度 w_1:

$$p_2 = p_1 + \frac{w_1^2}{v_1^2}(v_1 - v_2).$$

雨貢紐絕热綫上的不同綫段各对应于一种流动和一种燃燒情况。

可爆炸的混合气以低速(比音速低得多)流动时，存在的是正常的燃燒(圖 18 上的 dc 段)；这时，实际上实現的綫段是对应于 H_2 截面上燃后气体具有亞音速流动的那些情况。圖 18 上的 de 綫段在实际上是不实現的，这在形式上相当于：进入反应区的是亞音速气流，燃后气体則作超音速流动。这种情况之不能实現就是說在等截面管子里亞音速气流經加热不能轉变为超音速气流。

所有的爆震情况（圖 18 上的 bf 段）对应于 $w_1 \geqslant D$，即对应于 H_1 截面上的气流是超音速的。要得到定型的爆震燃燒，必須用噴管取得超音速气流；这方面必需的实驗設备如圖 28 中的虛綫所示[1]。

这时，af 段曲綫相当于反应产物为亞音速流动的情况，而 ab 段則相当于反应产物为超音速流动的情况。切点 a 滿足所謂自由定型爆震的条件，这时相当于所謂临界流动的情况，反应产物的速度恰为音速。

自然，对气流中燃燒特別有兴趣的研究者，工作的本質已使他們得到一些完全与火焰在管中推进时相类似的結果。

在阿勃拉莫維奇和伍利斯等人的著作里[2]都提出了雨貢紐絕热綫的式子，以及适用于气流中燃燒的 w_1, w_2 兩速度的相应式子，

① 这里要指出，在实际中要实現这样的实驗时，由于爆震的速度極高，貯气箱中需要極高的压强和極高的温度。

② 阿勃拉莫維奇著："实用气体动力学"，苏联国立技术理論書籍出版社，1949，此書 1953 年新版中譯本已由高等教育出版社出版；阿勃拉莫維奇及伍利斯合著："关于爆震及燃燒的力学"，苏联科学院报告，55, 111. 1947。

他們都論証了由亞音速气流轉变为超音速气流是不可能的。

这一証明在实質上完全符合我們这里所指出的，即在化学反应中有热量釋放时，在(p, v)面上代表这种狀况变化的直綫上有一段(在絕热綫上兩交点之間的那一段)是这样的：在这一段上气体的能量貯存大于反应所能釋放的全部能量(参看§8)。这就証明了亞音速气流作正常燃燒时是不可能有de綫段上的狀况的

如果超音速气流不用燃点(不用火花塞C)作爆震燃燒，而混合气是經定型震波的压縮之后才进入反应区的，那末就应該注意到，气流經震波后已成亞音速流。所以，既已証明靠加热(即燃燒)亞音速气流不可能轉变为超音速气流，則可知不用燃点作爆震燃燒时，絕热綫上ab段(压縮不足的爆震波)是不可能存在的。

也和火焰在靜止混合气中推进时完全一样，在气流中进行燃燒时，雨貢紐絕热綫上允許存在的流速，不是小于最大燃燒速度便是大于最小爆震速度。

在这兩个極限速度値之間有很大一个范圍，其中沒有一个情况是能滿足三个守恒方程的。

这里产生了一个很正当的問題：如果使气流具有上述極限之間的速度w_1，并給它燃点，那会怎么样[①]？

曾有人作过这样的設想：在这样一个w_1値之下，化学反应不会进行完全，而只放出反应热量中的一部分Q'来，这个Q'恰好使所給的w_1得以存在[②]。这种設想是与化学反应进行的分子圖景完全不相容的。很明显的，当溫度很高，又有远离化学平衡条件的可

① 这里要指出，当$w_1 = c_1$时，即当起始混合气作臨界流动时，定型的燃燒是不可能的。

② 这里要提醒一句，当Q値很大时，最大燃燒速度是与$\frac{1}{\sqrt{Q}}$成正比的，而最小爆震速度是与$\sqrt{Q}$成正比的。所以，当Q減小时，不可能存在的定型的速度范圍便随之縮小了。

反应物質存在时，反应必定会繼續进行下去，并放出热量来。气体整个的流动并不能影响到反应的进行；不論气体具有什么样的流速，总之并沒有什么能阻止反应进行的机構存在。

为了說清楚，在气体的某一流速下，究竟情况是什么样的，那就必須确定，在定型情况下物理上是否可能給定气体的任意速度及任意狀况。

先說較簡單的情况，气体从貯箱中向外流，而沒有燃燒。超音速流动与亞音速流动在性質上是大有不同的，所以我們分开来討論，先討論亞音速的外射流动，即实驗設备里沒有安置噴管①时的外射流动。

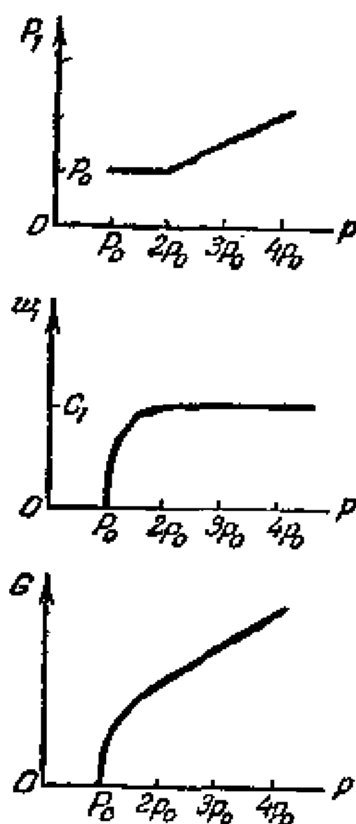


圖 29.

亞音速气流在出口处的压强与气流流入的外界环境大气压 p_0 沒有差别。当然，整段等截面管子里的压强都等于 p_0。管中的流速 w_1 随貯气箱中压强 p 不同(圖 29)而变：p 愈高，w_1 愈大。但 w_1 的增大只是在它尚未达到音速 c_1 之前才是可能的，达到音速时，对应的压强 $p\approx 2p_0$。大家都知道，不用噴管是得不到超音速气流的，不論用多高的压强。从上述的压强起，外射流动便停留在临界狀况上。压强再增高，外射的流速就不再有变化了②，这时管中气流的压强已不再是大气压，而是差不多等于 $0.5p$。

① 無化学反应的外射流动，詳見下列几本著作：阿勃拉莫維奇著："实用气体动力学"，苏联国立技术理論書籍出版社，1949；伍利斯著："論气流通过音速"，苏联科学院报告，64，669，773，1946；澤尔道維奇著："震波理論及气体动力学引論"，苏联科学院出版社，1946。

② 为了簡單起見，我們假定貯气箱中的压强尽管不同，但溫度是相同的。

圖 29 画了 p_1 和 w_1 对 p 的变化曲綫。

在实际的实驗設备上，最大兴趣总是在所謂流量（即單位时間内由貯气箱流出的气体質量）随貯气箱中的压强而变化的关系上。通常需要在給定的压气机工作能力之下把貯气箱中的压强决定出来。

流量 G 等于气流的密度 ρ_1 流速 w_1 和管截面 F 三者的乘积。流量对压强的关系画在圖 29 上。

我們来看一下，气流有燃燒时 p_1, w_1 和 G 这些数値怎么样。气流速度甚低时，燃燒产物的流速也是很低的。显然，燃燒产物作亚音速流动时，其压强，即 H_2 截面及該截面以右的压强 p_2 与大气压 p_0 是沒有差別的。前面已經証明过，气体作緩慢燃燒时，它是进行膨脹的，其压强是下降的，下降的値与燃燒速度成比例。因此，H_1 截面的压强 p_1 必較 p_2 为高，即較 p_0 为高，其間相差

$$p_1-p_2=p_1-p_0=\rho_1w_1(w_2-w_1)=\rho_1w_1^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}-1\right)\approx$$

$$\approx\rho_1w_1^2\left(\frac{T_2}{T_1}-1\right)=\rho_1w_1^2\left(\frac{Q+c_pT_1}{c_pT_1}-1\right)=\rho_1w_1^2\frac{Q}{c_pT_1}①.$$

最后，就气体由貯气箱流到 H_1 截面这一段使用柏努利公式，得

$$p-p_1=\frac{1}{2}\rho_1w_1^2,\quad p-p_0=\frac{1}{2}\rho_1w_1^2\left(1+2\frac{Q}{c_pT_1}\right);$$

拿这个式子同無燃燒时亚音速流动的柏努利公式作比較，我們就确信，要想得到与管中冷气流相同的流速，或是要想使流經該管的流量与冷气流的流量相等，那末有燃燒时貯气箱中的压强得比無燃燒时高一些。

假定在給定的貯气箱压强 p 之下，無燃燒时，冷气流外射是某个一定的速度 w_1' 的話，那末在有燃点时，而貯气箱中的压强依旧的話，气流就要改变，反应区之前的压强就升高了。这时，流量 G

① 密度的变化主要是由于燃燒时溫度升高了的緣故。

和流速 w_1 都减小了：

$$G=\frac{G'}{\sqrt{1+\frac{2Q}{c_pT_1}}},\quad w_1=\frac{w_1'}{\sqrt{1+\frac{2Q}{c_pT_1}}},$$

虽然燃燒产物的流速是大于原来無燃燒时的冷气流速的①：

$$w_2=w_1\left(1+\frac{Q}{c_pT_1}\right)=w_1'\frac{1+\frac{Q}{c_pT_1}}{\sqrt{1+\frac{2Q}{c_pT_1}}}>w_1'.$$

燃点时气流的变化正像管端口縮小而不燃点的情形一样。显然，在給定的反压之下，管端口縮小必使流量也减少，即相当于使管子未縮部分里的流速降低并压强升高。燃点的作用等于把管截面縮小为 $\sqrt{1+\frac{2Q}{c_pT_1}}$ 分之一。

貯气箱中的压强很低时，有燃燒的話，w_1 和 G 都与 $\sqrt{p-p_0}$ 成正比，且都是随 p 增大而增大的。但我們知道，w_1 的値是受緩慢燃燒的最大可能速度 $D_{最大}$ 所限制的。那末当压强升高到某个値 p_m，w_1 达到 $D_{最大}$ 値时，情况是什么样的呢？速度为 $D_{最大}$ 时，燃燒产物的狀况可由这样一个切点来代表，这切点是由原始点向雨貢紐絕热綫作切綫而得出来的，即由 (p, v) 面上的 d 点(圖 18)所代表。这时燃燒产物的速度在我們所取的坐标系上（即火焰靜止的坐标系上）恰等于音速。所以，当 $w_1=D_{最大}$ 时，燃燒产物的流动恰达临界狀况。

由此不难明了，从燃燒产物的流动达到临界狀况起，貯气箱中的压强再增高上去的話，燃燒产物的压强与外界压强相等这个条件就不一定必要了，因为燃燒产物已經以音速在流动了。因此，当压强 p 高于 p_m 时（p_m 是产生临界狀况时的压强），整个箱管設备

① 在这股气流里，有燃燒时，显然一切截面上的流量和質量密流都还是一样的，不論是燃燒产物，还是燃燒以前的冷气流：$G_1=G_2$，$\rho_1w_1=\rho_2w_2$。

的各部分压强(p_1, p_2)都与 p 成正比上升。所以，如果 $p=p_m$ 时 $p_2=p_0$，那末 $p>p_m$ 时就相应得到 $p_2>p_0$，这时燃烧产物便以高于大气压的压强流出去，出了管子之后再去进行膨脹。

根据气体的規律，密度是与压强成正比上升的，当 $p>p_m$ 之后，箱管設备中無論那部分的流速都同原来的一样，因为 $D_{最大}$(等于 w_1)和燃烧产物中的音速 c_2(等于 w_2)都与压强無关了。

这一点可以这样明确地作解释：流速决定于作用力（此力与压强差成正比)与进行加速的質量（与密度成正比的）之比値。因此，很自然的，从 p_2 与 p 成正比(因而差値 $p-p_2$ 也与 p 成正比)的那一刻起，w_2 便保持为定値，不随 p 增大而变化。

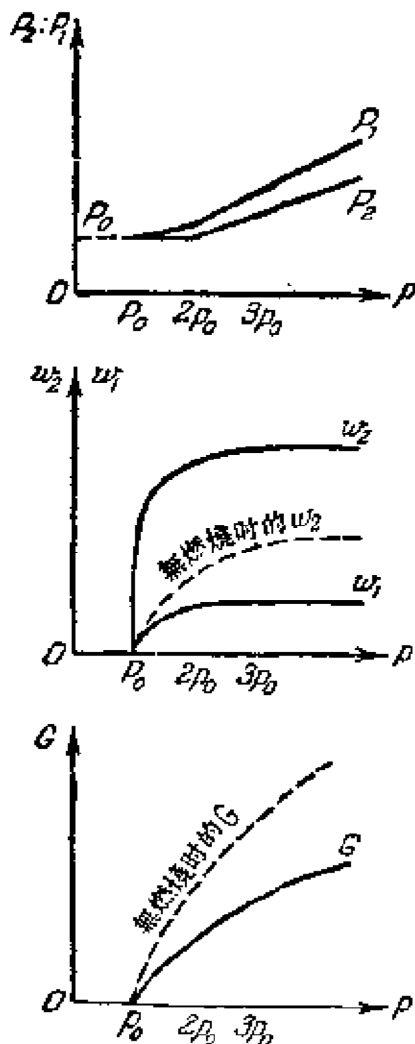


圖 30.

作为定型燃燒的最大可能速度 $D_{最大}$ 是与燃烧产物出現临界流动的現象有关的，这一点的意义同無燃燒时气流外射有一个最大可能速度 c_1，完全一样。

这里我們又看到了燃燒对气流的影响是和管口縮小对气流的影响極相类似的，在管口縮小处外射气流达到临界狀况时，在管子的直筒部分中流速必达某个一定値 w_1。如果貯气箱中的压强再高上去，G 便和 p 一样增大上去，但密度也作同样比例的增大，于是 w_1 仍保持不变，虽然它还是小于 c_1 的；因为 c_1 这个速度只是在縮小部分上才达到的。这也就説明了，燃燒是可

以限制最大流速的。

圖 30 上画了有燃燒时的流量、速度和压强三种曲綫，同时也画了冷气流的曲綫(用虛綫画的)以作比較。

气体从貯气箱經过具有漸縮噴口的直管外射时，外射气流的速度永不能超过外射气流中的当地音速。無燃燒时，对冷气流說来这一点是 $w_1 \leqslant c_1$。有燃燒时，对燃燒产物說来，这一点还是正确的：$w_2 \leqslant c_2$。由于有燃燒时，冷气流的流速与燃燒产物的流速有一定的关系，所以得 $w_1 \leqslant D_{最大} \leqslant c_1$，而当 $w_2 = c_2$ 时，恰好达到 $w_1 = D_{最大}$。

要产生超音速流，大家都知道，必須用一个局部縮小的噴管把貯气箱与直管連接起来。貯气箱中的压强足够高之后，在噴管的最狹截面处便建立起临界的流动来，該处气体的流速等于音速；气流在噴管的漸扩部分繼續运动下去，速度繼續提高，气流就变成超音速的了。

按柏努利公式，允許气流作無限制的膨脹时，气流速度的最大絕对值是根据这样一个条件决定的，即貯气箱中气体的原始焓值 H 完全变为气流的动能，这时气流的焓值变为零：

$$H = \frac{w_{1最大}^2}{2}, \quad w_{1最大} = \sqrt{2H}, \quad H_1 = T_1 = c_1 = 0, \quad \frac{w_1}{c_1} \to \infty.$$

但要实現这一点的話，直管截面积与噴管最狹截面积之比值必須达無限大，貯气箱中的压强也須为無限大[①]。

对于每个一定的截面积比值，在一定的貯气箱压强 p(但足够高的)之下，得到一定的一种超音速气流，其流速必是 $\sqrt{2H}$ 的某个一定的分数，究竟多大則决定于截面积比值，而 p_1 也必是 p 的一个分数，究是 p 的几分之几，也决定于截面积比值。管中气流旣是

① 貯气箱压强与外界压强之比必須为無限大。出口压强如果是給定的有限值，那末貯气箱中的压强就必須是無限大，不然，如果貯气箱中压强是給定的有限值的話，噴管出口处就必須是絕对眞空。

超音速的，从物理上看就很明显，管出口处的条件，即大气压 p_0，就决不能对噴管中的气流以及噴管前直管中的气流有什么影响了。

前面已經說过，压强 p_1 与 p 成正比，而与 p_0 無关。但这只有在 p_1 大于 p_0，或 p_1 不很低于 p_0 时才是正确的。如果，按噴管工作是理想的計算下来，p_1 只及 p_0 的几分之一，則大气压会压縮气流使它产生震波，震波的速度必大于 c_1，而在 p_0-p_1 这个压强差很大时，震波的速度甚至可以超过速度 w_1。这时震波便进入管内，停留在噴管的漸扩部分中某处；管中气流經震波压縮后变为亞音速流，$p_1=p_0$ 这个条件便实現了。

以上就是無燃燒时气流經噴管的流动情况。

用噴管使可爆炸的混合气变为超音速气流之后，就可以研究超音速气流里的燃燒了。

1. 如果流速 w_1 超过热力学上的爆震速度 $D_{最小}$，那末燃燒之后，燃燒产物的气流还是超音速的：$w_2>c_2$；燃燒不会改变燃点处以前 H_1 截面上混合气的狀况。知道了 H_1 截面上混合气的原始狀况及流速 w_1 之后，我們就很容易計算出燃燒产物的狀况来。为此，只要由原始点 p_1, v_1 向上作一直綫

$$p=p_1+\frac{w_1^2}{v_1^2}(v_1-v_0),$$

直到与雨貢紐絕热綫相交为止。与燃后气体的超音速流动特征相对应，在雨貢紐絕热綫上正有着在 d 点之右的一点(圖 18)。

2. 設噴管的截面积比値和貯气箱中气体的原始焓値有这样的一种数値，它在無燃燒的流动时 w_1' 能滿足下列的兩个不等式：

$$c_1'<w_1'<D_{最小}.$$

这时，从原始狀况所作对应于这个速度的直綫，与燃燒产物的雨貢紐絕热綫是沒有共同点的。在这种气流里进行燃点时，流动是不会不發生变化的：燃燒会起部分堵塞出口的作用。震波由燃

点处發生，震波使气流改变。由于噴管最狹截面与管截面兩者之比，以及 w_1' 与 $D_{最小}$ 兩者之比的不同，可以有兩种情况發生：或是(在临界截面相当狹窄的情况下)震波停留在噴管漸扩部分的一定位置上，气流經震波后变为亞音速流[1]，或是震波扫过整个噴管，整个气流都变成亞音速的。如果是后一种情况的話，噴管內各点的压强都有升高，流量則下降。

这兩种情况不論是哪一种，气流的变化必使流速 w_1 降为最大燃燒速度 $D_{最大}$，結果燃燒产物作临界流动。所以，气流的变化必是这样的，燃燒时所存在的情况一如無噴管而压强很高时一样。

以上在研究流經噴管的气流的燃燒情况时，我們一概假定貯气箱中的气压足够高：$p \gg p_0$。这时，所得到的燃燒产物不是超音速的便是临界流速(音速)的：不論哪种情况，压强 p_2 必与 p 成正比，而与 p_0 無关。假定 p 不够高，那末燃燒产物成亞音速流，其 p_2 等于大气压 p_0；与此相应，H_1 截面上的压强 p_1 也决定于 p_0，当然 $p_1 > p_0$。

噴管的临界截面愈狹，p 应該愈高，以使燃燒产物的流动达临界情况。

所以，在給定的气体原始狀况下，不是任何流速 w_1 都可能存在的，但在任何一种物理的实驗布置之下，总可以指出来哪种燃燒是存在的。

除了極快的超音速流，其流速超过爆震速度的之外，可爆炸的混合气燃点后必使气流改变，即在其他实驗条件都不变的情况下，与冷气流相比来說，有燃燒时的气流必有改变。气流变化之后，流速不是等于便是小于最大的燃燒速度。也就是說，气流这样的变化是与 $D_{最大}$ 至 $D_{最小}$ 这一禁区中会存在什么样的流动这个問題相应的。

[1] 这时，在震波之前以及临界截面上，气流都是沒有变化的，其中包括燃点时流量 G 不变这一点在內。

第三章　有損失的爆震理論以及爆震極限

§13. 損失对管中爆震波推进的影响

現在我們所要研究的有限直徑管中的爆震推进問題，除了化学反应以及反应时热量的释放之外，还要計及所謂損失的过程。这些过程便是燃燒气体把热傳給管壁，以及气体与管壁的摩擦。

在物理上是很明显的，傳热出去是同反应时释放热能正相反的过程，所以在公式里应該有热量释放速率和热量散失速率之差在內。

以前，不計損失时，对应于介質运动速度恰等于当地音速的那个切点，是在反应完畢那一瞬間达到的，也就是热量释放完畢那一瞬間达到的。計及損失时，这一点就在反应完畢之前达到了，不过那时反应已很弱，热量释放的速率已等于热量散失的速率。

于是，在以前的公式里，凡是有反应热量Q的地方，現在計及热量損失时，就得加进这样的一个反应热量差了，这热量差是从反应开始起直到达到等速直綫的切点为止所能放出的那部分热量与某种絕热之差，这絕热是符合于热量释放速率与热量散失速率相等时候的燃燒度的。

下一节里要証明，摩擦对于爆震也有类似的影响。

損失既減少了反应的有效热量，就必然使爆震速度降低。研究損失使我們有可能去了解，速度低于$D_{最小}$的定型爆震的推进，并去了解推进条件(管直徑，管壁粗糙度)对爆震速度的影响。

震波的幅度，即压強的突躍程度，以及化学反应能开始并进行

下去的溫度，又是为爆震速度所决定的。假定說反应速率与溫度的关系非常大，那我們不难想像震波速度略有下降对反应速率必大有影响。反应速率降低之后又必使損失增大，因为时間長了就必然会有更多的热量經管壁傳走。損失增大反过来又使波的速度減低，如此循环作用。反应速率很低时，爆震的推进变成不可能存在。

所以，計及損失时就可以了解必有爆震極限的存在，并可以解釋为什么一种混合气可以有爆震，而另一种混合气却不能有爆震；还可以求出爆震極限与推进条件(管徑等)之間的关系来。

在进行損失影响的理論研究之前，最好先說一說，关于爆震極限的某些实驗事实。可以說有好几种爆震推进的極限：按混合气的初始压强来說的爆震極限，按爆震在它里面进行的管直徑来說的爆震極限，按管壁粗糙度来說的爆震極限，最后，还有濃度的爆震極限。

我們这里要說的是爆震的濃度極限和为管直徑所規定的爆震極限。爆震的濃度極限研究得最全面。濃度極限我們可以說是混合物中燃料的这样一种極限的濃度，这时爆震波还能作定型的推进。

求定爆震極限的实驗应該在足够長的管子里进行，以确証所研究的波的定型性。

研究爆震極限时，可爆炸的混合气是用什么办法燃点的这件事極为重要。由火焰自行加速而成的爆震(參看 § 16)，就它所占的可能濃度范圍說来，比推进的爆震所占的范圍小得多。因此，在研究爆震極限时，絕不可以用熾热的螺旋电阻絲或电火花或火焰去燃点气体。普通用的燃点法是炸藥(往往用硝酸鉛或雷汞)的爆炸或是爆震波。

震波的燃点能力不仅决定于溫度及压强的幅度数值，而且还与这些数值的下降曲綫的形狀有关。为了使混合气能燃燒起来，

在混合气停留于高温高压区内的期間中，化学反应应該进行到相当远才行。

最好的燃点方法是用爆震波的方法，这爆震波可用下述的办法产生。把做实驗的管子用隔板分为兩部分。一部分充以强烈的爆震混合气(往往用 $2H_2+O_2$ 的混合气)，另一部分充以要做研究的混合气。在实驗即將开始前，先使管子的兩部分溝通。由于扩散作用，必形成一个混合区，这一区里气体的成分由純引藥成分一直变到完全是要做研究的这种混合气。从爆震混合气中产生的爆震波，推入变成分的区域，逐漸改变，最后进入要研究的混合气时，波的結構已能保証給推进造成最有利的条件。只要混合气的成分已在爆震極限之內了，那末波在要研究的混合气里就会成为定速的波，成分不对的話，波便会消灭。

如果在極限附近，火焰的光亮不足以直接印在运动的照相底

表 11. 爆震推进的濃度極限
(初始压强是一个大气压，初始温度是室溫)

混合气	燃燒物質在氧或空气中所占的百分数		下限的爆震速度，(米/秒)	上限的爆震速度(米/秒)
	下限	上限		
H_2-O_2	20	90	1457	3550
H_2-空气	18.2	58.9	1500	2100
$CO-O_2$ 干		83		-
CO O_2 湿	38	90	—	1473
$(CO+H_2)-O_2$	17.2	90	1500	2150
$(CO+H_2)$ 空气	19	58.7	1488	1690
C_2H_4-空气	5.5	11.5	1675	1801
$C_2H_4-O_2$	3.5-3.6	92-93	1607	2423
C_2H_2-空气	4.2	50	1509	1871
$C_3H_8-O_2$	3.2	37	1587	2210
$iC_4H_{10}-O_2$	2.9	31.3	1595	2188
H_3 O_2	25.4	75.4	2070	2982
$(C_2H_5)_2O$ 醚 $-O_2$	2.7	40	1563	2323

片上，那末可以利用根据折光率起变化的記录方法来做記录。

表 II 上列的是許多研究者所發表的爆震推进的濃度極限数据。

随着混合气的成分逐渐接近于極限成分，爆震波中化学反应的速率也逐渐下降，反应区的厚度則相应增大。到了某个临界厚度，反应区中的能量損失会达到这样的数値，致使定型的爆震推进成为不可能——这就是極限到临了。假定有什么办法能改变爆震波中的反应速率，那就可以希望爆震推进的極限范圍放寬或变狹。

关于化学反应速率对爆震推进的極限范圍的影响，最先在質方面正确提出这个問題来的是李文（M. A. Ривин）和索柯利克（A. C. Соколик）等人[1]。李文和索柯利克在可爆炸的混合气里滲入了少量的其他混合气，因而改变了反应的动力学。他們發現这时爆震速度并沒有变化，因为加进那一点他种混合气进去，反应的热效应 Q 和絕热指数 k 都沒有显著的变化。

許多研究者指出一氧化碳和空气的混合气，其成分如果恰合化学反应式的比例的話，用爆震波来燃点它时它是不起爆震的。李文和索柯利克在实驗里也沒有能使这种混合气产生爆震，他們用来燃点的爆炸波是从氫与乙烷和氧的混合气中产生的。但在这种混合气里只要加进 1.3% 的氫进去，就能得到定型的爆震波（爆震速度等于 1480 米/秒）。加点乙炔进去，也有同样的效应：記录上有过，加 0.3% 乙炔在一氧化碳和空气的混合气里，使能获得速度为 1458 米/秒的定型爆震波。加进去的氫和乙炔起作用的原因，是因为有了这些东西，一氧化碳的氧化过程使急剧地加速了。

也有人研究过延緩反应的摻混物 CO_2 对石油醚和空气的混合

① 李文、布列斯克尔和索柯利克合著："乙炔-空气混合气的爆炸極限"，物理化学杂志，10, 688, 692, 1937；李文著："混合成分对空气-甲烷混合气的爆震影响"，苏联科学院报告，30, 498, 1941。

气的爆震影响。在石油醚和空气的混合气里掺入各种份量的 CO_2，然后用可炸混合气产生爆震波去燃点它。結果發現，CO_2 含量大于 2% 时，爆炸波便具有不稳定的特征，而当 CO_2 含量大于 4—5% 时，爆炸波便根本点不着燃料和空气的混合气了。

所有这些实驗都証明，爆震波定型推进的可能性以及爆震極限的范圍是与混合气的动力学参数非常有关系的。

波的推进条件对于爆震極限的范圍可以有很显著的影响。表 II 上所列載的那些極限数値都是在实驗室条件下用直徑为 10—20 毫米的管子所做的实驗結果。加大管直徑必使損失于摩擦和散热的能量减少。所以用較大的管徑的話，可以預料爆震的推进極限范圍会放寬些。这些見解，是柯伽尔柯(С. М. Когарко)和澤尔道維奇合写的一篇文章[1]的基础。

柯伽尔柯和澤尔道維奇所用的实驗設备是一根内徑为 305 毫米長 12.2 米的鋼管，管子上做了一連串观察窗，以記录爆震的推进。爆震是用 30 克炸藥引發的。

用氫和空气的混合气做研究，發現爆震推进的下極限从細管的 19.6% H_2 降到粗管的 15% H_2，而爆震推进的上極限，則自 58.8% H_2 升到 63.5% H_2。

下面我們要詳細地研究一下代表爆震波中所进行的化学反应的那些方程，計及热量的損失和摩擦損失。着重点不在数値上，而在于方程特点的原則性問題上，所謂方程特点是指相切的条件和爆震極限。

这样的一种研究在理論上所以使人感到兴趣，还因为从所得到的方程不用任何补充的人为研究方法(如用活塞等)就可以証明，存在一个一定的可能爆震速度，也就是产生所謂爆震速度的决擇。

[1] 柯伽尔柯和澤尔道維奇合著："論混合气的爆震"，苏联科学院报告，63，553，1948。

在計算爆震速度时，也把損失計算进去。当損失極微小时，算出来的爆震速度接近于用經典方法算出来的数值，而当損失有一定的数值时，爆震速度必小于經典数值。

进行这个研究的时候必須做一个極重要的簡化，那就是同意討論一元定型問題，即假定气体的狀况仅决定于一个坐标值——沿管軸的距离，其起算点例如取为震波的波头。

要这一假設成立，在每一垂直于管軸的截面上，我們有兴趣的那些物理量——压强、溫度、成分、反应速率——必須在所有各点上都是均一的数值，都不能与各点到管壁的距离有关系。

显然，在实际上这一假定是完全不能实现的。但我們可以說成一种較緩和的一元近似的应用条件：每个截面上我們所感兴趣的那些物理量既是不均一的，我們在一切方程中用到这些物理量时就用它对截面而言的平均值，例如气体的平均密度、平均速度、平均成分等等。

这时誤差的性質及誤差的数量級就很明确了。例如，速度平方的平均值实际上不等于平均值的平方；在給定的溫度分布下，化学反应的平均速率不仅决定于平均溫度，而且还决定于溫度的分布特征。

作一元的近似处理，究竟对于我們有兴趣的問題的物理結果有多大影响？要回答这个問題必須弄清楚，在一个截面上，我們所感兴趣的这些物理量在实际上是怎样分布的。取坐标系与爆震波一起运动，那末原始的混合气在受压縮之前，是以完全均一的超音速在运动的，經过压縮之后，在震波波头之后，气体的运动速度便急剧下降了，其音速則上升。在进行反应的已压縮区域里，气体运动是亞音速的，因此，每一截面上的压强是来得及拉平的。有时候，震波波头上各点的压强不一致：这种情形在粗糙管內进行爆震是可以料得到的，因为震波掃在管壁的突起处必使局部压强升高。

这种情形在螺旋爆震波的头部也会發生(参看§14)。已压縮气体相对于波头的速度旣是亞音速的,我們就可以断定,截面上这种不均一的压强一定消失得極快,結果甚至在很接近震波波头的截面上,其压强也簡直是个常数。把截面上的压强取为平均値,这在計算中所引起的誤差是最小的。

在一元的处理之下,我們把管壁所引起的損失平均分攤在整个截面上。实际上,气体进入运动之后并被震波压热之后,气流中受到冷却的以及受到滯緩的必从紧貼管壁的那層气流开始。

圖31上表示了震波 AB 的位置,还有气体与管壁彼此起作用的区域(圖31上的影綫部分)。

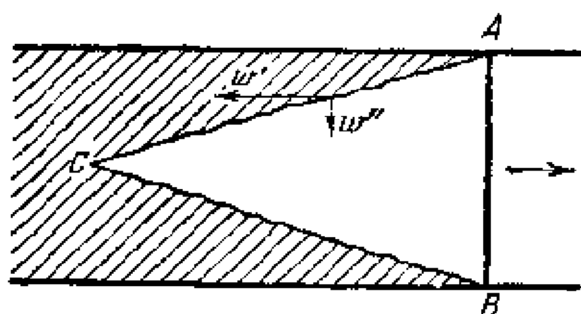


圖 31.

在 A, B 兩点附近,气流像流过平板一样。AC 和 BC 兩綫是未扰动气流与已扰动气流的分界綫,这兩条都差不多是直綫。

根据气流流过平板的实驗得知,边界綫移动的横向分速 w'' 等于气流相对于平板的縱向流速之 0.02。知道了縱向流速 w',就能算出 AC 和 BC 兩綫的斜率来。C 点离波头的距离約等于管直徑的15倍[①]。

从波头附近起始的紊流区,应該像平行流流过平板时在平板上所产生的紊流附面層一样。

我們这个例子的附面層厚度应該可以大致表为

$$\delta = 0.02x, \qquad (13.1)$$

式中的 x 是未扰动气流中流体微团所走过的長度。t 时間后这段

① 参看罗强斯基(Л. Г. Лойцянский)著:"附面層的空气动力学",苏联国立技术理論書籍出版社,1941,第337頁。

長度等于 wt。如果这个时間是用波相对于介質的移动距离来計量的話，那末

$$l=(D-w)t, \qquad (13.2)$$

于是

$$\delta=0.02\frac{wl}{D-w}. \qquad (13.3)$$

$\frac{D-w}{w}$ 这个数值的平均值約可取为 0.6，則当 l 約为 30 倍管半徑，或 15 倍直徑时，δ 等于管半徑。

可見大多数情形下，在管壁作用延及整个截面之前，化学反应早就完畢了。

这样，我們能否用一元的近似法去处理损失問題呢？假如截面的一部分被未扰动气流所占据的話，损失对爆震速度会有影响嗎？这兩个問題的答案都是肯定的。我們所謂"未扰动"的部分，指的是与管壁之間还沒有紊流热量交換，还沒有紊流摩擦的那部分气流。但貼近管壁那層气流(圖中影綫地区)的冷却和滯緩① 必使压强有所变化，压强变化还会遍及整个的气流，所以也会影响到未扰动的那部分气体。

当影綫部分的厚度改变时，气流在管壁上的摩擦系数和傳热速率实际上都是保持不变的。因而一元的损失作用在理論上所产生的誤差是不大的(20—30%)。在給定的反应时間② 下，一切关于损失使爆震速度改变的結論，毫無疑問在質的方面是正确的。气体在光滑管中进行爆震时，按一元計算得(參看后面)：

$$D_{理論}-D\approx\frac{t_{反應}D^2{}_{理論}}{r}.$$

① 在相对坐标系上，波是静止的，管壁則以爆震速度在移动，也就是在这个坐标系上管壁的移动速度超过已压縮气体的运动速度。因此，在实驗室坐标系上(即固定坐标系——譯注)，实际上是气流滯止的过程，到了运动坐标系上(在这种坐标系上波头是固定不动的)，就成了加速过程了，就是說气体被管壁拖走了。

② 这里指的是达到切点的反应时間。在給定的反应时間下，化学反应究竟是否在整个截面上均一地进行，对于损失影响速度的問題是無关紧要的。

这个結果毫無疑問在数量級上是正确的 这个公式使我們得以根据計算出来的爆震速度与实际量得的爆震速度作比較，去估計爆震波中的反应时間

一元理論在問題的質的方面正确地預料到，減小管直徑，增大摩擦系数（以粗糙管代替光滑管）时，必使 D 減小。关于損失对于气体压强和运动的影响之理論結論，实驗上虽尚無証明，但也無庸怀疑。

至于爆震極限的一元理論，因为它是基于对化学反应作一元处理的，那就完全是另一种情形了。化学反应速率随溫度的变化極强烈，所以如以平均溫度来替代真实的溫度分布，可能使反应速率起極大的改变．这方面一个粗略的例子是室溫下的可炸混合气：如果把整个混合气均匀地加热 30°，反应并不开始，但如將百分之一的混合气加热3000°，那末已热的部分便会起極迅速的反应（燃燒），反应之后紧接着火焰便推开去，結果全部混合气都燒着了。可是將百分之一的混合气加热 3000°，所产生的平均溫度之变化，与全部混合气加热 30° 是完全一样的。

这个例子說明，反应速率無論如何也不能看作是平均溫度的函数。

在蕭尔金所研究过的粗糙管中气体爆震里，也看到完全类似的現象。如果用粗糙管替代光滑管，那摩擦便要增大，爆震速度要降低；正如我們已指出的那样，在这个問題上，一元理論是可以用的。降低爆震速度，必使震波速度下降，于是就降低了震波所压縮过的气体的平均溫度。从一元理論的观点看来，損失增大下去应料到，極限范圍縮狹，也就是某些混合气在光滑管中原来可以进行爆震的，到了粗糙管里就不起爆震了。

实驗得来的却是相反的圖景——在粗糙管子里，極限的范圍反而放寬了。这一与一元理論矛盾之处可以这样来解釋，震波在

粗糙管中推进时，震波遇到粗糙面的个别突起处会产生極高的局部溫度上升[①]。因此，化学反应进行得比在光滑管中还快，虽然粗糙管中的平均溫度比光滑管中的低。

可見，不管溫度分布的一元理論，在粗糙管的問題上，在質的方面都会得出不正确的結論来的。

蕭尔金和他的同事在最近發表的文章里，特別清晰地指出，即使光滑管中的爆震推进接近極限情况时，反应还是与一元情况大有区別的，那时会有螺旋爆震出現。关于螺旋爆震的詳細描写放在 § 14 里。

所以，一元的極限理論主要是一种原則上的理論上的玩意，作为我們內心里一种計算爆震可能性的無矛盾的想法，在实际的气体爆震中是并不能实現的。在可能推进的極限爆震到临之前，一元圖景已經不稳定了，而为螺旋爆震所替代。一元的極限理論完全不能用来作实际的極限計算。因此，凡是对問題的实驗方面有更大兴趣的讀者，可以略去下述的計算法不必讀它。

§ 14. 损失对管中爆震推进的影响在量的方面的算法

現在我們来研究，摩擦和傳热损失对于光滑長管中爆震推进的影响。不难看到，气体在管中的运动必是紊流。光滑管中出現紊流的条件是雷諾数大于 2000。雷諾数指的是这样一个比值，$\frac{2r\rho w}{\eta}$，这里的 η 是介質的粘性系数，r 是管半徑。进行爆震时，$w\sim10^5$ 厘米/秒，$\eta\sim8\times10^{-4}$(高溫下气体的粘性系数)，气体的密度已为震波压縮数倍 $\rho\sim10^{-2}$，这样，如果 $r=1$ 厘米，則 $\mathrm{Re}\sim2.5\times\times10^6$，所以 $\mathrm{Re}>2000$ 这个条件是早就满足了的。波头附近的紊

① 見澤尔道維奇著："气体的燃燒及爆震理論"，苏联科学院出版社，1944。

流运动是非定型的。这种运动像二元直勻流流过極薄的平板前边緣一样，其未扰动气流是平行于平板的層流。这时，如前述，在平板上会出現紊流層，其厚度与离前緣的距离成正比而增大。

与紊流層相接触的單位平板面积所受的摩擦力等于

$$\sigma = \frac{c_f}{2}\rho\frac{w^2}{2}, \tag{14.1}$$

式中的系数 c_f 希利希丁(Шлихтинг)有个很准确的計算公式[參看劳强斯基所著关于附面層的書，第131頁，公式(5.13)]:

$$c_f = \left(2\ln\frac{\rho wx}{\eta} - 0.65\right)^{-2.3}.$$

我們作估計时假定 c_f 与 x 根本無关。此外，管中的摩擦只有在內管壁一面有，c_f 应减半。管子單位截面积上的总摩擦力是这样算的：以周綫 Π 乘 σ，然后除以管截面积 Φ。

摩擦可以解釋为动量的轉移。也就是説，σ 值就是在單位时間內經單位壁面所轉移的單位質量的动量（即 w）。而在紊流里，一切轉移現象都具有相似性(所謂雷諾比拟)。如果說轉移的数量是 w，那末轉移系数就等于 $c_f\frac{\rho w}{4}$ $\left(因\ \sigma = c_f\frac{\rho w}{4}w\right)$。因此，当轉移的是热量的时候，就得用过渡到壁面溫度时介質的焓的变量 ΔH 以替代 w(單位質量的动量)了。这时通过單位表面积流过的热量是：

$$q = c_f\frac{\rho w}{4}\Delta H = \frac{c_f}{4}\rho w\cdot c_p(T - T_{壁}), \tag{14.2}$$

而爆震波中介質所損失的能量，对單位横截面积說来就等于 $\frac{\Pi}{\Phi}q$。

現在我們再把管中定型紊流的摩擦和傳热公式写出来：

$$\sigma = f\cdot\frac{\rho w^2}{2}, \tag{14.3}$$

$$q = f\cdot\frac{\rho w}{2}c_p(T - T_{壁}). \tag{14.4}$$

这里的 f 可用布拉休斯（Блазиус）的公式作近似的計算：$f=\frac{0.08}{\sqrt{Re}}$，这个 $Re=\frac{2r\rho w}{\eta}$①。(14.3)(14.4) 这两个公式，就 w 和 H 两种量的轉移說来，是满足雷諾比拟的。

現在列下計及损失时的气体动力学各方程。以前的那些方程中只有質量守恒这一个还有效：

$$\rho_0 D=\rho(D-w). \tag{14.5}$$

能量守恒和动量守恒那兩条定律現在得改成这样說法：兩控制面內介質所损失的能量或动量就是轉移給管壁的能量或动量。

取坐标系与波一起向右运动，在这个坐标系上研究运动。在这个坐标系上，管壁和尚未反应的混合气同以速度 $-D$ 在运动。管子的横截面积我們記为 Φ。取兩个控制面，兩者相距 dx。我們已經知道，單位时間內流經任一控制面的动量是

$$\Phi[p+\rho(D-w)^2].$$

兩个控制面上这些物理量之差便是單位时間內轉移給管壁的动量。因为單位管長在單位时間內得到的动量是 $\Pi\sigma$，dx 管長得到的便是 $\Pi\sigma dx$，这里的 σ 应按介質的瞬間狀况去决定。这个数値便应等于流过兩控制面的动量之差。通除以 Φdx，得

$$\frac{d}{dx}[p+\rho(D-w)^2]=\frac{\Pi\sigma}{\Phi}. \tag{14.6}$$

这里的 $\frac{\Pi\sigma}{\Phi}$ 取正号，因为在波头不动而管子运动这样一个坐标系上，这个量是使介質加速的。

---

① 在水力学里，有时把阻力系数称为力的比值，这是指作用在長度等于管直徑的一段流体上的力，除以动压 $\Phi\frac{\rho w^2}{2}$。这个比值等于

$$\frac{\Pi\cdot 2r\cdot\sigma}{\pi r^2\frac{\rho w^2}{2}}=\frac{\Pi\cdot 2r\cdot f\frac{\rho w^2}{2}}{\pi r^2\frac{\rho w^2}{2}}=4f,$$

因为 $\Pi=2\pi r$。

同理可以列下能量平衡关系来，能量平衡就是兩控制面上的能量密流之差，等于傳給管壁的能量。

能量密流应写为这样

$$\Phi\rho(D-w)\left[H+\frac{(D-w)^2}{2}\right],$$

H包括化学能在內。由側壁而傳走的能量計有兩种：热能的傳遞和摩擦力所做的功。傳出去的热等于 $\Pi q dx$，而摩擦功則等于摩擦力 $\Pi\sigma dx$ 乘管壁的运动速度 $-D$。于是能量方程成为

$$\frac{d}{dx}\rho(D-w)\left[H+\frac{(D-w)^2}{2}\right]=-\frac{\Pi}{\Phi}q+\frac{\Pi D\sigma}{\Phi}, \qquad (14.7)$$

在这个式子里机械功算作正，因为在运动坐标系上說来，管壁对气体做了功，使气体的速度由波头上的$-(D-w)$变成了$-D$，絕对值增大了；这样，气体离波头愈远，它的动能就愈大。

就一般的情况来研究上面导出来的这一方程組是極困难的。我們从个別的特殊情况来說起，先假定摩擦損失不起作用。

根据雷諾比拟关系，我們馬上可以事先断言，这一假設在質的方面說来是不成立的（粗糙管中可以存在相反的情况，即热量損失同摩擦比起来很小）。q 和 σ 都是通过同一个 f 值表示的这种情况，不允許略去摩擦，同时却还保留傳热。如將方程(14.7)改用無因次变数来写的話，那末右側兩項是屬同一數量級的。

然而却發現，如果只研究傳热損失的話，其結果在質的方面并沒有什么不同；而單研究傳热这一种損失，那是簡單得多了。所以在这一节里我們要研究的爆震是只有热量損失的爆震，下一节再推广到包括机械能損失。

首先，如把方程(14.6)的右項略去，即得

$$p-p_0=-\frac{D^2}{v_0^2}(v-v_0), \qquad (14.8)$$

这就是說，气体的狀况將仍同以前一样，在(p,v)平面上沿直綫变

化。这可并不是説这条直綫同沒有損失时一样，因为摩擦降低了 D 値，直綫的斜率必較小。不过只要沒有机械能損失，在任何一个 D 之下，p 与 v 必成單値的关系。

热量的損失并不能表为具体的函数。把它簡單記为一个符号 $M=\frac{\Pi}{\Phi}q$。这样，方程(14.7)便可以表为积分的形式

$$H-H_0+\frac{1}{2}(p-p_0)(v_0+v)=-\int Mdx, \qquad (14.9)$$

我們把震波放在 $x=0$ 那一点上，方程中的 $\frac{(D-w)^2}{2}$ 为 $\frac{1}{2}(p-p_0)(v+v_0)$ 替代之后[参看(1.11)]，就把(14.9)由負 x 区的初始狀况积分起。

如把焓中的化学能部分分开写，这个等式便成：

$$\frac{k}{k-1}pv+\beta Q=\frac{k_0}{k_0-1}p_0v_0+Q+\frac{1}{2}(p-p_0)(v_0+v)-\int_0^x Mdx.$$

为了方便起見，假定 $k=k_0$，这样公式看起来可以清楚些，波前波后的 k 値也不必加多余的限制。这个方程可以写成略为不同的形式

$$p\left(\frac{k}{k-1}v-\frac{v_0}{2}-\frac{v}{2}\right)-p_0\left(\frac{k}{k-1}v_0-\frac{1}{2}v_0-\frac{1}{2}v\right)=$$
$$=Q(1-\beta)-\int_0^x Mdx. \qquad (14.10)$$

我們求出函数 $h(v,D)$ 之后，这个函数就是爆震無損失时(14.10)的左側；用(14.8)代掉上式中的 p：

$$h(v,D)-\frac{1}{2}\left[p_0+\frac{D^2}{v_0^2}(v_0-v)\right]\left(\frac{k+1}{k-1}v-v_0\right)-\frac{p_0}{2}\left(\frac{k+1}{k-1}v_0-v\right)=$$
$$=Q(1-\beta)-\int_0^x Mdx. \qquad (14.11)$$

从这个方程可以看到，当 $\beta=0$①，$x=0$ 时，函数 $h(v,D)$ 恒等于零。有兩組完全不同的 p,v 值都可以滿足它：第一是在波前，那里的 $v=v_0$，介質还根本沒有受到压縮，第二是紧靠震波波头之后的 v 值，那里反应尚未开始，$\beta=0$①。

在無損失的爆震中，反应可以进行到底，右側只簡單地有一个 Q，左側的比容则对应于直綫与全部热量都放出来的那条絕热綫的切点；由此得 D 的方程。無損失时，(14.10)式变成了雨貢紐絕热綫的方程，这条曲綫是代表全部热量都放出来的絕热綫。反过来，当 $\beta=1$ 时，即紧靠震波波头之后，所得到的比容是在給定 D 值之下雨貢紐絕热綫上震波点的比容。

震波足够强的时候，这个比容值等于 $\frac{k-1}{k+1}v_0$，而一般地說来，这个比容值是决定于 D 值的。

所以，$h(v,D)$ 的大致形狀就像圖 32 那样。每条 $h(v,D)$ 曲綫都經过 $v=v_0$ 这一点，而函数 h 的另一个零則一定在 $v=\frac{k-1}{k+1}v_0$ 之右。只有 $D=\infty$ 的那条曲綫才是真正通过 $v=\frac{k-1}{k+1}v_0$ 这一点的。D 愈小，h 曲綫愈低，等到 $D=c_0$ 时，即当 D 等于未扰动气体中的音速时，h 曲綫的正数部分 $h>0$ 便全縮成一点了。一切更小于这个数的 D 值，其 h 曲綫必在 v_0 点之右，那就相当于圖 18 中 cd 綫段上的燃燒情况。

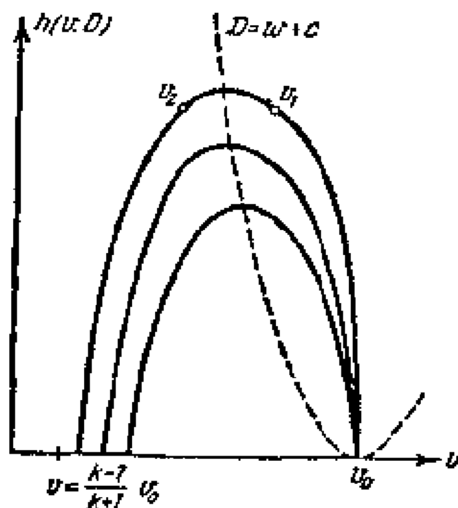


圖 32.

函数 h 在 $D=w+c$

① 这里似应是 1 而不是零。按 §9 关于 β 的定义，β 代表尚未反应的混合气的濃度，这里也应該是 1，而不是零——譯者注。

的那些点上达極大值。以后我們將略去初始压强 p_0，但即使不略去，h 在 $D=w+c$ 点达極大値也很容易从一般的形式上去加以証明的。

事实上，我們現在拿一个震波来看，这个震波把气体的狀况由 v_1 压縮至 v_2，它对固定坐标系的推进速度是 D。这个震波的雨貢紐絕热方程是这样的:

$$h(v_1, D)=h(v_2, D),$$

在压强用动量守恒和質量守恒律表示之后，这个条件就表示震波中的能量守恒。在極大値 h 那点附近，比容 v_2 很近于 v_1，所以这个震波是音波。因此，狀况 v_2 是以速度 c 相对于狀况 v_1 而推进的，而狀况 v_1 則以速度 w 相对于固定坐标系而推进。所以，相对于固定坐标系的波速 D 是等于 $w+c$ 的，这 w 和 c 当然是極大値 h 那一点的数値。

这一点用解析法也很容易証明。事实上，研究無損失的爆震时，得导数 $\frac{d\beta}{dv}$ 为

$$\frac{d\beta}{dv}=-\frac{1}{Q}\frac{dh}{dv}=-\frac{D^2}{Qv_0^2}\frac{k+1}{k-1}\left(\frac{k}{k+1}v_0-v\right)$$

(略去 p_0 項)。这个値在 $v=\frac{k}{k+1}v_0$ 时变成零，这我們已看到，就等于 $D=w+c$ 那个条件。这个条件，在反应完了 $\beta=0$ 的要求之下，便單値地决定了 D 値。

我們这里要証明，即使有損失，D 値也是被單値地决定了的。把积分关系式(14.11)改成微分式。显然

$$\frac{dh}{dx}=-Q\frac{d\beta}{dx}-M. \tag{14.12}$$

导数 $\frac{dh}{dx}$ 可以表为 $\frac{dh}{dv}\frac{dv}{dx}$。記 $\frac{k}{k+1}v_0=v_1$，然后利用 $\frac{dh}{dv}$ 値，便得 $\frac{dv}{dx}$ 的式子:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{k-1}{k}\frac{Qv_0^2}{D^2}\frac{\frac{d\beta}{dx}+\frac{M}{Q}}{v_1-v}. \qquad (14.13)$$

关于$\frac{d\beta}{dx}$我們有化学动力学方程可用,这个化学动力学方程与(9.5)不同,它是按克拉貝隆(Клапейрон)方程和等式(14.8)用比容代替压强和溫度,而不是像以前那样用β代替比容和压强的:

$$\frac{d\beta}{dx}=-\beta^n\varphi_1(v, D).$$

这$\varphi_1(v, D)$是个同符号的正函数。

这样便得到了一个微分方程組。这方程組由兩个一阶微分方程組成:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{k-1}{k}\frac{Qv_0^2}{D^2}\frac{\beta^n\varphi_1(v, D)-\frac{M}{Q}}{v_1-v}, \qquad (14.14)$$

$$\frac{d\beta}{dx}=-\beta^n\varphi_1(v, D). \qquad (14.15)$$

假定由緊靠震波波头之后的地点算起,那末初始值便应取$v=\frac{k-1}{k+1}v_0$, $\beta=1$。此外,我們要求,爆震波經过之后由于傳热出去而反应产物冷却,在波头之后經一定的距离,介質的比容回复为v_0。从而給滿足这兩个一阶微分方程的函数又加了一个边界条件。这个条件只在一个D値之下才能滿足。

为要証明这一点,并求爆震推进速度的本身D,我們来看(14.14)方程。这个方程的分子和分母都是正負項相間的函数。在波头上,$v<v_1$,这是因为$v=v_1$点对应于圖32曲綫的極大値,而我們的积分是由曲綫極大値之左$h=0$那一点积起的,即由小比容积起的。

一般說来可以有四种情況:

1. 在$x=0$那里,释放的热能已經小于傳走的热能:$\beta^n\varphi_1Q<<M$,那时在波头上已經有$\frac{dv}{dx}<0$。气体就不是进行膨脹,而是进

行压縮了，那就不可能达到比容 v_0。波头之后的气体比容就不像后来要膨脹那样会經过一个極小值；的确，既然在震波波头上释放出来的热能已經小于傳走的热能，那末随着比容减小下去，当然就更是如此了。

事实上，我們已經証明，导数 $\frac{dT}{dv}\sim(v_0-2v)$[参看(9.9)]，因而在 $v<\frac{v_0}{2}$ 的波头上，随着比容下降，溫度也必下降。这时释放出来的热量也随着下降，如果說在波头上傳走的热量已超过释放的热量，那末在波后当然差得更厉害，于是定型爆震波就不可能存在了。

2. 更一般的情形，$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{h=0}>0$，后来变为零，这就是說比容先达到極大值，后来开始下降。凡是分子比分母先趋于零的，都是这种样子。这时比容也像第一种情形那样，不可能回复到初始值 v_0。

3. 分子分母同时变为零。分母只在 $v=v_1$ 时才变为零。把这个 v 值代入分子，我們在給定的 D 值下，便能得到一个 β 值，而且只有一个 β 值。这就是說，如果經过初始点以及(14.17)式[①]右側分子分母同时变为零的那一点，只有一条积分曲綫，那末导数 $\frac{dv}{dx}$ 在变零点是不改变符号的。所以这样一条积分曲綫是代表單調膨脹的，直到 $v=v_0$ 为止。

4. 分母比分子先变为零。这只能發生在一点上，而且在这一点上导数 $\frac{dv}{dx}=\infty$。因而导数 $\frac{dx}{dv}$ 在这一点上等于零，这样 x 是先随 v 增大到極大值，然后开始下降的。这种情形在物理上是不可能存在的，因为这样的話，解答就不是在一切 x 上都存在的了。

这四种情形，只有第三种能产生定型的爆震。这时，对一定的 D 值，只有一条积分曲綫。这第三种情形我們是这样去定的，即当 $v=v_1$ 时，释放出来的热量恰等于傳走的热量。为了选定这个 D

① 前面并沒有(12.17)式，疑是(14.14)之誤——譯者注。

值，我們沒有像討論無損失的爆震那样，用流体动力学的推理，給它一个附加的膨脹波。

这里我們要証明，計及損失时所选取的 D 値应低于不計損失时的"热力学" D 值. 为此，我們把(14.12)式写成积分的形式

$$h(v_1, D)-\frac{D^2}{2(k^2-1)}=Q(1-\beta_1)-\int_0^{x_1} M dx. \quad (14.16)$$

积分进行到 $v=v_1$ 的那个 x 值为止. 無損失爆震的 D_0 我們是按方程

$$h(v_1, D_0)=Q \quad (14.17)$$

去决定的，显然

$$h(v_1, D)<h(v_1, D_0), \quad (14.18)$$

这是因为(14.16)的右側和(14.17)的右側比起来，所差部分是一个很大的負值 $-Q\beta-\int_0^{x_1} M dx$。但 $h(v, D)$ 在 $v=v_1=\frac{k}{k+1}v_0$ 这一点上是等于 $\frac{D^2}{2(k^2-1)}$ 的，这我們已經看到就能决定無損失爆震的速度：$D_0^2=2Q(k^2-1)$。因此

$$D<D_0.$$

这就是說，如果在求(14.14)(14.15)方程組的积分时先給定 $D\geqslant D_0$，那当然就得出第一种或第二种情形了。

卽使是極低的 D 值，也是屬于那兩种情形的。当 D 很小时，按§8的方程算下来，爆震波头上气体的溫度必很低，对应地，释放的热量成指数地低。同时，傳走的热量却与溫度成代数的比例关系，这样，溫度較低时，傳走的热量当然大于释放的热量，这我們列为第一或第二种情形。

現在我們假定第四种情形存在，卽在 $v=v_1$ 或 $v>v_1$ 时，释放出来的热量大于傳走的热量。我們已經确知，当 D 很大时，卽当 $D>$

D_0 时一定是第一种或第二种情形，而当 D 很小时，仍然是第一种或第二种情形。这就是說，如果在某一区里存在有第四种情形的話，那它的 D 值必是上下都有限制的。而第三种情形不过是第四和第二兩种情形的分界綫而已，这在圖 33 上是看得很清楚的；圖 33 上画了各种 D 值的积分曲綫。因此，由第四种情形轉到第二种情形就有兩种变法，相应地对于不同的 D 值也有兩种狀况。其中一种代表的就是爆震，而另一种，我們下面要証明，是不稳定的。如果把这第四种事先除外的話，那末第三种情形就只能在下述的条件下存在了，即当第四种情况的極限縮为一点时。

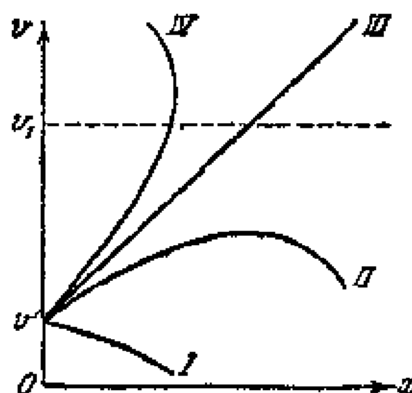


圖 33.

这样，我們經过对(14.14)—(14.15)方程組的分析，便証明了只存在一个一定的爆震速度 D，这个 D 是在給定直徑的管子里在管壁一定的傳热特性之下所能存在的爆震速度。如果再計及摩擦的机械损失，分析將大为复杂化，但質的方面的这些結論依旧是有效的。

現在来算算爆震波內溫度是怎样随坐标变化的。为此，可以采用我們已知的漸近指数积分 $e^{-\frac{A}{RT}}$ 法并假定其他一切函数在震波波头附近的变化慢得多，这些函数同指数律比起来可以認为是常数。

只要利用克拉貝隆方程与 $p=-\frac{D^2}{v_0^2}(v-v_0)$ 的关系，就很容易把比容的方程改为溫度的方程。不經任何省略，这个方程成为

$$R\frac{dT}{dx}=Q\,\frac{k-1}{k}\,\frac{v_0-2v}{v_1-v}\left(\beta''\varphi-\frac{M}{Q}\right). \tag{14.19}$$

由此可見，当 $v=\frac{v_0}{2}$ 时，溫度达極大值。不过我們不拟把

(14.19)积分到那样远，而只打算求出波头附近$T(x)$的性态。这时可用$\frac{k-1}{k+1}v_0$代波头上的比容值v'。函数φ_1写为$\varphi_0 e^{-\frac{A(T-T')}{R(T')^2}}$，这里的$\varphi_0 \sim e^{-\frac{A}{RT'}}$。损失值$M$也代以它在波头上的数值。經这样替代之后，(14.19)便簡化成

$$R\frac{d}{dx}(T-T')=\frac{2Q(k-1)}{k}\left(\varphi_0 e^{-\frac{A(T-T')}{R(T')^2}}-\frac{M}{Q}\right). \qquad (14.20)$$

这个方程用变数分离法便很容易求出积分。它的解是

$$e^{-\frac{A(T-T')}{R(T')^2}}=\frac{1}{\frac{Q\varphi_0}{M}-\left(\frac{Q\varphi_0}{M}-1\right)e^{\zeta}}, \qquad (14.21)$$

这里的$\zeta=2\frac{k-1}{k}\frac{MAx}{(RT')^2}$。

方程(14.21)只能用在波头附近；特别是，这个方程沒有表示出任何的溫度極大値来，我們沒有討論这个極大値，只假定了$v=v'$。由方程(14.21)可見，不論哪种情形，如要爆震能存在，应有不等式

$$\frac{M}{Q\varphi_0}<1,$$

这个不等式并不一定要很强，所以有損失时我們作如下的估計：

$$\frac{M}{Q\varphi_0}\lesssim 1. \qquad (14.22)$$

这个估計式子現在可以帮我們把損失使爆震速度所起的变化計算出来。D的方程是这样的：

$$h(v_1, D)=Q(1-\beta_1)-\int_0^{x_1} M dx.$$

可見，損失在式子里是兩个符号相同的項：$-Q\beta_1$，$-\int_0^{x_1} M dx$，我

們这里要証明：只要反应的級次 n 不是十分高的話，这兩項里的第一項总是比第二項小。当 $v=v_1$ 时，按 β_1 的定义，β_1 应满足这样的一个等式：

$$\beta_1^n \varphi_1 = \frac{M}{Q},$$

式中的 φ_1 是切点的 φ 値，或者說得更准确些，是釋放热量与傳走热量恰相等那一点的 φ 値。由此得 β_1 之値为

$$\beta_1=\left(\frac{M}{Q\varphi_1}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{M}{Q\varphi_0}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_1}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{M}{Q\varphi_0}\right)^{\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n}\left(\frac{A}{RT_1}-\frac{A}{RT'}\right)}.$$

但 $T_1>T'$，而且 $RT_1\ll A$，$RT'\ll A$。因此 $-\frac{A}{R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T'}\right)\gg 1$，

而只要 n 不太大，那就有 $e^{-\frac{A}{nRT'}+\frac{A}{nRT_1}}\ll 1$。

上列式子的第一个乘数 $\left(\frac{M}{Q\varphi_0}\right)^{\frac{1}{n}}\sim 1$，正如剛才所証明的那样。所以在这些条件之下，$\beta_1\ll 1$。

积分 $\int_0^{x_1} M dx$ 之値很容易从等式 (14.21) 估計出来，这个等式說明，只要 $\frac{M}{Q\varphi_0}$ 不太接近于一，那末

$$\zeta\ll \ln\left(1-\frac{M}{Q\varphi_0}\right)\approx -\frac{M}{Q\varphi_0}.$$

由此得

$$\int M\,dx\approx Mx\approx \frac{k}{2(k-1)}\frac{(RT')^2}{A}\frac{M}{Q\varphi_0}. \tag{14.23}$$

由損失而来的那兩項之比是

$$\frac{c_p}{2R}\frac{(RT')^2}{AQ}e^{\frac{A}{nR}\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T_1}\right)}.$$

在上述的 n 限制之下，我們可以略去 β_1，把 h 式中的初始压强也略去，代以 $h(v_1, D)=\frac{D^2}{2(k^2-1)}$，即得

$$h(v_1, D) = \frac{D^2}{2(k^2-1)} = Q - \frac{MRT'^2 c_p}{2QA\varphi_0} e^{-\frac{A}{RT'}}.$$

如果略去初始溫度的話，这里的 T' 就等于 $\frac{D^2}{2c_p}\left[1-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\right]$. 最后得 D^2 的超越方程:

$$D^2 = 2Q(k^2-1) - g_1 e^{-\frac{\Delta}{D^2}}, \tag{14.24}$$

式中的 $\Delta \equiv \frac{2Ac_p}{R\left[1-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\right]}$, $g_1 \equiv M\frac{(RT'')^2}{QA\varphi_0}\frac{c_p}{2R}$, 而 $2Q(k^2-1) = D_0^2$, 也就是無損失时的爆震速度。有指数的那一項自然可以写为

$$e^{-\frac{\Delta}{D^2}} = e^{-\frac{\Delta}{D_0^2} - \frac{D^2-D_0^2}{D_0^4}\Delta}.$$

改用無因次变数 $s \equiv -\frac{D^2-D_0^2}{D_0^4}\Delta$ 并將函数 g_1 展为值 $D-D_0$ 之冪，就使方程(14.24)变成

$$s = g_2 e^s. \tag{14.25}$$

常数 g_2 是無損失时波头上热量傳走速率对热量釋放速率二者之比(准确度到只差一个無关紧要的常数乘数，这个乘数是决定于 k 値的)。当 $g_2=0$ 时，自然 $s=0$, 即 $D^2=D_0^2$。由方程(14.25)很容易得到

$$\frac{ds}{dg_2} = \frac{e^s}{1-s},$$

由此可知，s 不可能大于一，因为当 $s=1$ 时，导数 $\frac{ds}{dg_2}=\infty$。

所以，不是一切損失热量与釋放热量比之下都可能有定型爆震的: 从某一个損失数値起始，爆震就不可能存在了。最大的 s 値是 $s=1$, 由此，当釋放热量与損失热量有对应的比値时，便很容易算出 $D=D_1$ 値来。由 $s=1$ 时的等式

$$D_1^2 = D_0^2 - \frac{D_0^4}{\Delta} = D_0^2\left(1-\frac{RT'}{A}\right),$$

得 $$D_1=D_0\sqrt{1-\frac{RT'}{A}}\approx D_0\left(1-\frac{RT'}{2A}\right).$$

D 随 g_2 变化的关系曲綫画在圖 34 上。現在我們要証明，低于 D_1 的速度一般說来是不代表稳定爆震的。稳定爆震只是圖 34 上粗綫所代表的那些情况。圖上的細綫部分相当于不稳定的情况。無論哪种情况，其稳定性的准則总是这样的，即速度 D 有些許变化时，其損失的对应变化应导致 D 向相反方向的变化。

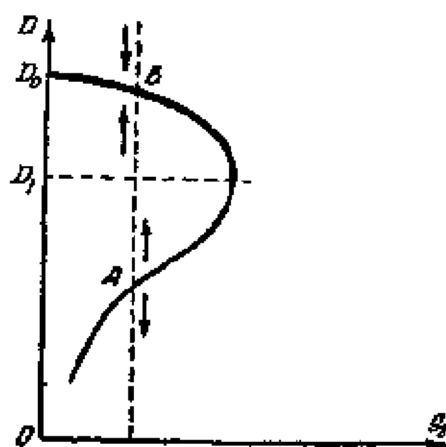


圖 34.

可以証明：如果是在下半段曲綫上，速度有些許变化时，如圖上的箭头所示，它的变化只是增大起来的，而在上半段曲綫上，則当速度有些許变化时，它的变化是趋小的。所以下半段細綫不代表稳定爆震，而是所謂的分水嶺曲綫：在一定的損失下，混合气中如果产生了速度低于下半段曲綫的速度 D 的震波，那这个震波是会自己消灭的，而如果混合气中产生了一个大于 D 的震波，那末这个震波便会發展为正常的爆震波，其推进速度相当于上半段粗綫所对应的速度。

为了証明这点，我們来研究一下 $F=g_2-se^{-s}$ 这个差值。$F=$ $=0$ 对应于圖 34 上的曲綫。凡是 F 为正的地方，必是損失热量超过释放热量的地方，凡是 F 为負的地方，必是释放热量超过損失热量的地方。如沿 $g_2=0$ 的直綫走一遍的話（在这条綫上函数 $F=-se^{-s}$），函数 F 在 $s=1$ 处达極小值，其値为 $F=-1$，可見，在圖 34 曲綫以内的地区，释放热量都大于損失热量，而在曲綫以外的地区，則释放热量都小于損失热量。

假定我們由 A 点向下作少許的移动，如箭头所示。只要根据

剛才所述的道理我們就知道，这时函数 F 应增大，而溫度下降，这就使釋放热量減少，爆震速度更下降一些，这样最后，爆震必归消灭。反过来，如果由 A 点向上移动少許，那末函数 F 下降，溫度上升，据此爆震速度必上升，直到速度升达 B 点为止，B 点是稳定爆震。在 B 点，速度增大时，F 增大，損失增大，因而使整个物系仍回到 B 点。

这样我們就証明了，絕不是隨便多大損失都可以有爆震存在的。損失大到某个值的时候，爆震速度达極小值，損失再大些，爆震便不可能存在了，这是同爆震極限的实驗事实完全符合的。

但旧理論根本都不計及損失，以及与之相关連的爆震極限。按旧的爆震理論說来，把混合气任意冲淡，就能得到任意低的爆震速度，低到可以任意地接近音速，例如 400 米/秒，这时事实上速度 D 只可能作很小的变化，其变化与 $\frac{RT}{A}\cdot D$ 同一数量級。爆震确有極限存在，而且極限的范圍很狹，这已为实驗所肯定。

§15. 有損失爆震的一般問題・热量損失及机械能損失

現在我們来研究同时有热量損失和机械能損失的一般情况；这时的微分方程我們已經写过了，那就是(14.6)和(14.7)兩个方程。前面已經說过，有机械能損失时，p 与 v 之間就不再是直綫关系了。我們得推出包括損失在内的一組 p, v, β 的微分方程来。

先把(14.6)和(14.7)的左側变一下：

$$\frac{d}{dx}\left(p+\frac{(D-w)^2}{v}\right)=\frac{d}{dx}\left(p+\frac{(D-w)^2}{v^2}v\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(p+\frac{D^2}{v_0^2}v\right)=\frac{dp}{dx}+\frac{D^2}{v_0^2}\frac{dv}{dx}. \qquad (15.1)$$

(14.7)的左側有导数 $\frac{dH}{dx}$ 在内。我們把H表为

$$H=\frac{k}{k-1}pv+Q\beta.$$

这样(14.7)的左側就可以演化为

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{D-w}{v}\left(H+\frac{(D-w)^2}{2}\right)\right]=\frac{d}{dx}\frac{D}{v_0}\left(H+\frac{(D-w)^2}{2v^2}v^2\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{D}{v_0}\left(H+\frac{D^2}{2v_0^2}v^2\right).$$

把微分展开，这个式子成为

$$\frac{D}{v_0}\frac{kv}{k-1}\left[\frac{dp}{dx}+\left(\frac{k-1}{k}\frac{D^2}{v_0^2}+\frac{p}{v}\right)\frac{dv}{dx}\right]+\frac{QD}{v_0}\frac{d\beta}{dx}. \qquad (15.2)$$

把 $\frac{p}{v}$ 用当地音速表示：

$$\frac{p}{v}=\frac{c^2}{kv^2}.$$

把演变后的(14.7)方程兩側同用 $\frac{D}{v_0}\frac{kv}{k-1}$ 除一下，然后用 $\frac{k-1}{k}$乘(15.1)式①，从第一个式子减去第二个式子。这样(14.6)—(14.7)②的方程組便成我們所要的形式

$$\frac{dp}{dx}+\frac{D^2}{v_0^2}\frac{dv}{dx}=\frac{\Pi\sigma}{\Phi}, \qquad (15.3)$$

$$\frac{dp}{dx}+\frac{c^2}{v^2}\frac{dv}{dx}=$$

$$=\frac{\Pi}{\Phi}\left[\sigma(k-1)\frac{v_0-v}{v}-q\frac{v_0(k-1)}{vD}\right]-\frac{Q(k-1)}{v}\frac{d\beta}{dx}. \qquad (15.4)$$

这里的导数 $-\frac{d\beta}{dx}$ 还得根据化学动力学方程用 $\beta^n\varphi_1$ 代替。

这里引用一个簡化的符号：

$$\xi\equiv(k-1)\frac{v_0-v}{v}-\frac{q}{\sigma}\frac{v_0}{v}\frac{k-1}{D}+\frac{Q(k-1)\Phi}{\Pi\sigma v}\beta^n\varphi_1. \qquad (15.5)$$

---

① 原書中似誤印为(13.1)式——譯者注。

② 原書中为(12.9)—(12.10)，恐系誤印——譯者注。

用了这个符号，我們的方程組就具有下列这样紧凑的形式了：

$$\frac{dp}{dx}+\frac{D^2}{v_0^2}\frac{dv}{dx}=\frac{\Pi\sigma}{\Phi}, \tag{15.6}$$

$$\frac{dp}{dx}+\frac{c^2}{v^2}\frac{dv}{dx}=\frac{\Pi\sigma}{\Phi}\zeta. \tag{15.7}$$

在反应剧烈进行期間，反应速率很大，$\xi>1$。反应实际完畢之后，剩下来的只是反应产物繼續滯止，并进行冷却，而 $v\sim v_0$，反应速率極低，$\xi<1$。$\xi=1$ 点的意义是可以闡明的，只要从(15.6)和(15.7)兩方程中求出导数 $\frac{dp}{dv}$ 来：

$$\frac{dp}{dv}=\frac{\frac{c^2}{v^2}-\frac{D^2}{v_0^2}\xi}{\xi-1}. \tag{15.8}$$

我們看到，$\xi=1$ 对于方程(15.8)說来是个畸点。

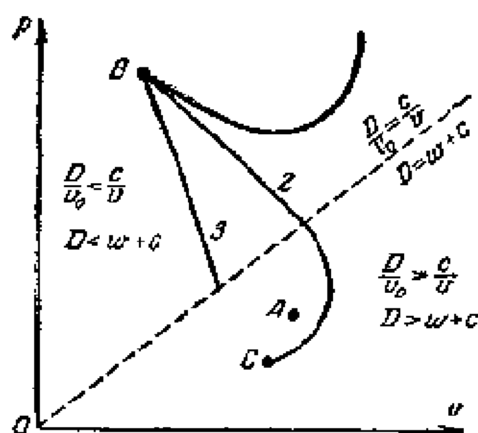


圖 35.

我們来研究一下方程(15.8)的积分曲綫在这个畸点附近的性态。

对未扰动气体說来，爆震的推进速度是大于音速的：$D>c_0$。气体的比容在震波中有突变，由 v_0 变到 v，致使 $\frac{D}{v_0}=\frac{D-w}{v}<\frac{c}{v}$（圖 35）。

微分方程（15.8）的积分起点 B 高于虛綫 $\frac{D}{v_0}=\frac{c}{v}$，即是高于 $D=w+c$ 綫[1]。这条直綫是由坐标原点出發的 这条綫的方程是

1） 这里提醒一下，$\frac{c^2}{v^2}-\frac{D^2}{v_0^2}=\frac{c^2}{v^2}-\frac{(D-w)^2}{v^2}=\frac{c^2-(D-w)^2}{v^2}$，因为 $\frac{D}{v_0}=\frac{D-w}{v}$。

$p=\frac{v}{k}\left(\frac{D}{v_0}\right)^2$。初始狀况 A（震波到达前）的位置低于直綫 $D=$ $=w+c$。爆震产物經滯止及散热后，其終了狀况 C 点也在直綫的下面，这是因为終了狀况的比容恰等于初始比容，而压强也差不多等于初始压强的緣故。爆震产物經完全滯止后，其速度在我們所用的坐标系上是等于 $-D$ 的。所以，按定型性的条件，据質量守恒律得 $v_C=v_A=v_0$。

因为我們的方程計及了整个的滯止过程，所以在原理上說来，从方程上应能得到狀况 C。

在 $D=w+c$ 直綫以上，波相对于介質的速度 $D-w$ 是小于 c 的，这个区域自然就称为亞音速区。反之，下面的区域便称为超音速区。重要的是，超音速区与亞音速区的划分要看我們用的坐标系是哪一种：在一种坐标系上是亞音速的速度，到了另一种坐标系上就可能成了超音速。但同波一起运动的却只有唯一的一个坐标系，因此，在这种坐标系上运动是定型的，在这个坐标系上，亞音速区与超音速区的划分便是一定的了。

$D=w+c$ 这条直綫我們称为临界綫，或音速綫。$\xi>1$ 应在 $D=w+c$ 直綫以上达到。这可以从 $\frac{dp}{dx}$ 和 $\frac{dv}{dx}$ 的两个方程上看出来：

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\xi-1}{\frac{c^2}{v^2}-\frac{D^2}{v_0^2}}\cdot\frac{\Pi\sigma}{\Phi},\tag{15.9}$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\frac{c^2}{v^2}-\frac{D^2}{v_0^2}\xi}{\frac{c^2}{v^2}-\frac{D^2}{v_0^2}}\cdot\frac{\Pi\sigma}{\Phi}.\tag{15.10}$$

事实上，不管在化学反应过程中比容是怎样变的，总之在膨脹过程中，积分曲綫至少得越过 $D=w+c$ 綫一次。在这条直綫上，凡是 $\xi\neq1$ 的地方导数 $\frac{dv}{dx}$ 都等于無限大，所以积分曲綫只能在

$\xi=1$ 点上越过 $D=w+c$ 綫。

这里再来研究几种情况。

1. $\xi=1$ 値的到临較积分曲綫遇 $D=w+c$ 綫为早，以致 $\frac{dp}{dv}$ 較早变为無限大。这时所得到的曲綫是按第 *1* 类曲綫(圖 35)而趋于無限大的；只要由于化学反应的某种放肆过程，ξ 不能重新大于一，后来又小于一的話，这条曲綫就不会达到終了狀况 C。但 $(\xi-1)$ 的最后一次变符号必須与綫的相交重合，这样积分曲綫在亞音速区中才不致变为無限大。只有在 $\xi=1$ 时，按(15.8)式在直綫 $D=w+c$ 上导数 $\frac{dp}{dv}\neq\infty$，同时 $\frac{dv}{dx}\neq\infty$，$v(x)$ 曲綫才可能延續到 $D>w+c$ 区里去，才可能达到 C 点。

2. 曲綫 *2* 是符合这个要求的；在这条曲綫上，同时 $\xi=1$，$D=w+c$。但 $\xi=1$ 是說，释放热量在某种意义上恰抵消損失。例如，由方程(15.10)可見，当 $\xi=1$ 时，$\frac{dp}{dx}=\frac{\Pi\sigma}{\Phi}$，这就是說，單位長度上的压强变化(15.10)恰等于全部的切向力，并且比容是定型的。

在 $\xi=1$, $D=w+c$ 那点上，(15.9)和(15.10)变成 $\frac{0}{0}$，即成为不定式。

研究了各种类型的积分曲綫之后，我們得到了这样一个結論，即微分方程(15.9)和(15.10)的畸点是屬于鞍型的畸点。通常过这个畸点有兩条积分曲綫，这兩条曲綫是划分不經过鞍点的兩曲綫族的。我們确信代表化学反应过程中膨脹过程的这条积分曲綫，必定經过鞍点。这种曲綫还应經过代表原始介質的点，这所謂原始介質是指已經震波压縮过了，尙未进行反应的介質。这就給了个多余的条件，根据这个条件去决定 D。

$\xi=1$ 这个条件是說，有这样一个关系式存在：

$$Q\beta^n\varphi_1=\frac{\Pi}{\Phi}q\frac{v_0}{D}-\frac{\Pi}{\Phi}\sigma\left[\frac{v}{k-1}-(v_0-v)\right]-$$

$$=\frac{\Pi}{\Phi}\left(q\frac{v_0}{D}+\frac{\sigma v_0}{k^2-1}\right)=\frac{\Pi}{\Phi}\left[q\frac{v}{D-w}-\sigma D\frac{v}{D-w}\frac{1}{k^2-1}\right], \quad (15.11)$$

这里用了方程(15.5)的关系。

右側第一項說明，沒有机械能損失时($\sigma=0$)，在$\xi=1$点上，热量的損失恰好抵消釋放出来的热量。的确，如果那層介質的比容是v，那末$\frac{v}{\Phi}$便是那層介質的厚度，而$\frac{v\Pi}{\Phi}$是它的側表面积。于是$q\frac{v\Pi}{\Phi}$是單位長度上的热量損失，$q\frac{v\Pi}{\Phi(D-w)}$就是單位时間內的热量損失。假定設想沒有热量損失($q=0$)，只有机械能損失，那就發現机械能損失并不簡單地等于釋放的热量，而是要乘上$\frac{1}{k^2-1}$的。

这样我們就証明了，在这一点上，爆震波相对于介質的速度恰好等于当地音速，即$D-w=\frac{vD}{v_0}=c$。这个条件就替代了有任意損失的爆震的相切条件。轉入超音速区之后，必到C点，因为C代表完全滯止。

3. 最后，假定积分曲綫遇$D=w+c$直綫較ξ等于1为早。在这点上，$\frac{dv}{dx}=\infty$，曲綫$v(x)$就不可能在对应于$D=w+c$的x值內得到延續，这在物理上是沒有意义的。

这样，我們所选的第二种情形就是唯一可能的情形了。

$\xi=1$不是在$\beta=0$时达到的，即不是在全部燒完的时候达到的。所以在介質速度恰等于当地音速$D-w=c$的那一点上，还剩有一定量的尙未进行反应的介質，这个剩余量在原则上說是可以用理論来确定的。同时，以后的反应对于爆震波推进已經沒有什么影响，因为这时的爆震速度对于x_1点(在該点处$D=w+c$)以后的狀况說来已經是超音速的了。因此，由該点以后的点出發的任何气体动力学方程特性綫都已追不上x_1点了。爆震波的推进仅

为到达該点以前那部分化学反应热量所决定。与此相应的是爆震速度降低了：首先由于沒有燒完，其次由于有損失（我們已經看到过，有热量損失时，速度的下降主要部分正是与損失有关連的）。爆震速度的相对变量是这样一个公式：

$$\frac{\Delta D}{D} = -\frac{1}{2(k^2-1)Q\rho}\int_0^{x_1}\frac{\Pi\sigma}{\Phi}dx - \frac{1}{2Q\rho_0 D}\int_0^{x_1}\frac{\Pi q}{\Phi}dx - \frac{1}{2}\beta_1, \quad (15.12)$$

这可以从方程(15.4)逐項积分去求得。比較不大的損失就已使爆震成为不可能了。

公式(15.12)使我們可以对 $\frac{\Delta D}{D}$ 之値作如下的估計。假定由实驗得知，在定直徑的管子里，爆震速度在某一段上比 $\sqrt{2Q(k^2-1)}$ 这个値减小了一些，例如少5%。問反应区有多厚？关于这个問題，得分清楚兩种厚度，一种是沿管長由波头量起的厚度，波头相对于介質而运动，另一种厚度是 wt，即在反应时間内，介質相对于管壁的运动距离［參看(13.2)和(13.3)兩式］。公式(15.12)中的燃燒不完全那項，即 $\frac{1}{2}\beta_1$ 項可以略去，因为当反应的級次不十分高的时候，燃燒不完全的作用是不大的。整个的速度降低相对値 $\frac{\Delta D}{D}$ 可以分为兩部分：热量的部分，这部分决定于积分 $\int q\,dx$，和机械能部分，这部分与 $\int \sigma\,dx$ 成正比。我們可以証明，这兩部分彼此是差不多大的。机械能損失部分有个乘数 $\frac{1}{k^2-1}$，見(15.11)式。取 $k=\frac{6}{5}$，則 $\frac{1}{k^2-1}=\frac{25}{11}$。$q$ 値与焓 H 的轉移有关，而 σ 則与速度 w 的轉移有关。因此兩种轉移的比値是与 $\frac{H}{Dw}$ 同一数量級的。这个比値严格說来在反应过程中是变化的，但不妨取其平均値。在§11所举的数例里，$Q=45$，那么 $D=6.48$。至于 H 和 w，可取平均値 $\bar{H}=60$，$\bar{w}=3.8$。这时，机械能損失与热量損失之比便是

$\frac{25}{11}\cdot\frac{60}{6.48\times3.8}\approx1$。要計算 $\frac{\Delta D}{D}$，只要算出机械能損失来再乘以 2 就行了。

机械能損失可按公式(14.1)計算：

$$\sigma=\frac{c_f}{2}\rho\frac{w^2}{2}.$$

c_f 如按希利希丁的插算公式估計的話，約等于 $\frac{1}{300}$。$\frac{w^2}{Q}$ 的平均值等于 $\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$。密度比 $\frac{\rho}{\rho_0}$ 是波头上的 11 与轉入超音速区后的 $\frac{11}{6}$ 之間的平均值。我們取其当假定这一点到波头的距离是 x_1（沿管長計量)，则得 $\frac{\Delta D}{D}$ 的值$\left(代入\frac{\Pi}{\Phi}=\frac{2\pi r}{\pi r^2}=\frac{2}{r}\right)$：

$$\frac{\Delta D}{D}\approx2\times\frac{1}{300}\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{2}{r}\times\frac{4}{9}x_1\approx\frac{x_1}{60r}. \qquad (15.13)$$

如果我們按实驗数据取 $\frac{\Delta D}{D}\approx5\%$，则 $x_1=3r$。据此，反应时間可以作 $\frac{x_1}{D}$ 算。取 $D\sim3\times10^5$ 厘米/秒，那末反应时間約为 2.5×10^{-5} 秒。(15.13)式說明，$\frac{\Delta D}{D}$ 大致与管半徑成反比。

§ 16. 螺旋爆震

1926 年，堪拜尔(Кампбелл)和布得汉(Будхен)在研究一氧化碳与氧的混合气中的爆震波时，得到了一种与普通爆震截然不同的攝影記录。这种攝影記录上的波头是起伏波紋形的綫，反应产物的光亮区中的水平条紋系（圖 36）是与这波紋綫有关的。波头上每一突峰对应于反应产物光亮区中的一个条紋。

实驗証明，这种现象是完全可以复制的。这种爆震称为螺旋爆震[①]。在給定的混合气成分之下，在一定直徑的管子里必能产

① 关于“螺旋爆震”这个术語的意义，在本节后面闡明。

生螺旋爆震，与燃点的方式無关，而且一一起伏之間的距离 L（等于各光亮条紋之間的距离）是很严整的常数。改变管子的內徑 d 时，距离 L 也与管徑成比例地变化，而 $\frac{L}{d}$ 保持不变。表 III 举 3 个例子，这是在各种直徑管子里作 $2CO+O_2$ 混合气的实驗时量得的 L 值。

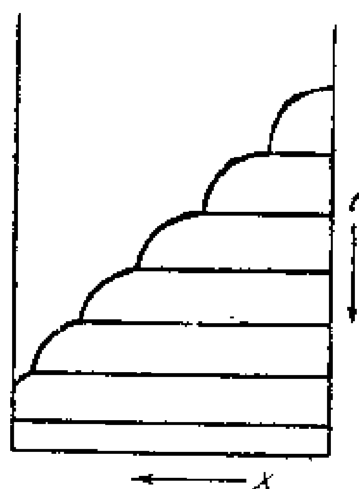


圖 36.

表 III.

d,毫米	L,毫米	$\frac{L}{d}$
15	45	3.0
12.5	36	2.9
10	29	2.9

表 IV 上列載的是五种混合气作螺旋爆震时，各自的光亮带周期变化的頻率 ν。

表 IV 中所列的 ν 值是指所謂單头螺旋爆震的頻率，單头螺旋爆震就是只有一个燃燒点的螺旋爆震。这种螺旋爆震可在很难起爆震的混合气里看到，也可在普通条件之下正常起爆震的但很接近極限爆震的混合气里看到。在混合气中加入加速反应的物質，或是在远离爆震極限的时候，便可能产生多头的螺旋爆震。

表 IV. 龐(Bone)和弗雷瑟(Fraser)測得的螺旋爆震頻率①

混 合 气 成 分	管直徑（毫米）	ν (1/秒)
$2CO+O_2$	25.5	24,000
$C_2H_2+O_2$	15.0	53,000
$2H_2S+3O_2$	13.0	44,000
$CO+N_2O$	12.8	44,000
CH_4+O_2	13.0	68,000

这些头保持一定的間隔沿螺旋綫运动。用攝影記录时，这就

① 龐和弗雷瑟合著："气体爆炸中火焰运动的攝影考查"（Photographic Investigation of Flame Movements in Gaseous Explosions）文載 Philos. Trans. Roy. Soc. A 230, 363. 1932。

显現为频率 ν 增大，且 ν 作突躍的整数倍变化。

蕭尔金和他同事們的著作，在进一步的实驗研究上是很有貢献的，他們肯定了，螺旋爆震是一种極普遍的現象，例如，CS_2 与 O_2 的混合气，H_2 与空气的混合气，CO 与 O_2 的混合气，碳氫化合物与空气的混合气，都不論混合比如何，要产生爆震就只有螺旋爆震这一种机構。作正常爆震的混合气，当接近爆震推进極限时，唯一可能的爆震就是螺旋爆震，也就是說，接近極限时，正常的爆震一定要变成螺旋爆震。研究正常的爆震，如果攝影能力提高，往往就会發現实际上爆震波是具有螺旋結構的。所以，正常的爆震比我們所想像的少得多；在許多場合記录的是正常爆震，而实际上却是头数極多的螺旋爆震。

螺旋爆震到底是什么呢？

关于螺旋爆震的本質这里提供兩条假設：

1）現象發生的原因是因为在螺旋爆震中反应的进行是有周期性的。

2）現象的發生是因为較管直徑为小的光亮地帶的运动是走螺旋綫的，螺旋綫靠近管壁。

第二条假設的正确性有堪拜尔及其同事的許多聪明的实驗为証。那些实驗我們在这里簡單介紹一下。他們的第一种实驗是根据下述的推理得出来的。如果光亮地区确是沿螺旋綫运动的話，那末它在管壁上相隔 90° 的观察窗里出現所需要的时間应正等于它轉 360° 所需总时間的四分之一。

这种实驗的安排簡圖如圖 37。圖中的 R 是具有兩个相隔 90° 的观察窗 A 和 B 的爆震管，CD 是返光鏡，把 A 窗射来的光反射到攝影机的物鏡 O 里去。在記录底片上确实显出，光亮条紋彼此之間的距离是 $^1/_4L$ 和 $^3/_4L$，这个 L 是無返光鏡 CD 單單記录 B 窗的光亮条紋时所得到的条紋之間的距离。

还有，已經証明，記录从W窗（圖 38）射来的螺旋爆震光亮条紋間的距离等于从F窗射来条紋距离的二分之一。显然，这个事实只能从爆震波头在繞管軸作旋轉上去解釋：波头每轉一次，光亮段在W窗出現兩次，而在F窗則只出現一次。

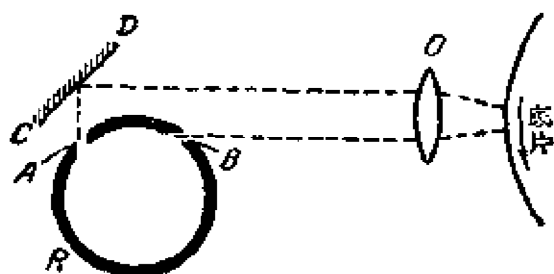


圖 37.

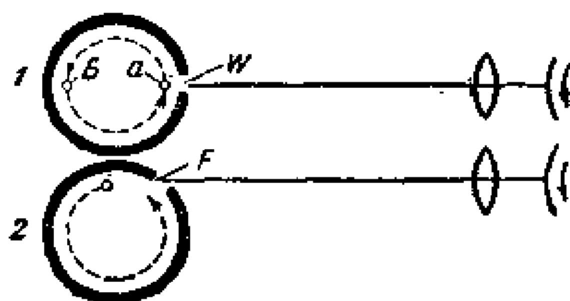


圖 38.

饒有兴趣的是从管子端头来攝录螺旋爆震的实驗，这个实驗用黑紙把管端遮起来，只沿管壁四周留一圈寬 2 毫米的隙縫。这种实驗記录下来的是各种类型的擺綫。擺綫的类型决定于底片上焰头記录的运动速度。条紋的頻率正对应于底片上的条紋的頻率。兩种方向的螺旋，順时針的与反时針的兩方向的螺旋机遇一样。

关于光亮地帶旋轉的假設还有一种無意中获得的令人信服的証据。有些实驗是从鉛管内开始螺旋爆震的，然后使爆震进入玻璃管，这时就很清楚地看到在玻璃管壁上有鉛粉的痕迹，波走过之后呈螺旋迹綫。这种观察导致这样一种有意安排的实驗，其中在混合气未充入管子之前，先在管壁上塗一層薄薄的粉末，例如滑石粉。这样等爆震波走过之后，在管壁上就可以看到化学反应最强烈地区的螺旋运动的清晰痕迹。

所以，根据这些实驗的材料，关于燃燒区是旋轉的这个假設，可以認为已經証实了。螺旋爆震这个名詞中的螺旋（спин）兩字就是从英文旋轉（spin）上来的。

照片上形成光亮条紋的机構可以从下面的实驗去了解。經过与管軸綫相垂直的隙縫来攝录螺旋爆震波(圖 39)，在迴轉的底片上便得到一条鋸齿形的綫[堪拜尔与芬区(Финч)的实驗]。这样，最亮的地区就成为狭条紋——裙帶，其長度的方向与管子的母綫方向一致；其旋轉的頻率与螺旋波头的相同。現在我們設想爆震波是經过与管軸一致的隙縫記录下来的，当裙帶出現在隙縫上的时候，底片上便出現一条紋——这是裙帶的瞬时照片。条紋的傾斜度决定于裙帶与管軸綫之間的角度。有关裙帶本質的数据現在还一点都沒有。

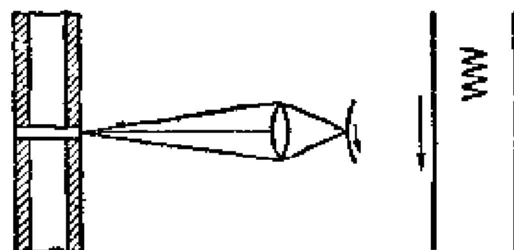


圖 39.

某些研究螺旋爆震的人曾認为，裙帶繞管軸的等速旋轉的原因是在于：螺旋爆震里进行旋轉的不仅仅是光亮区，而是整个气体質量都在繞管軸旋轉。不过，这种看法是違反动量矩守恒律的。在光壁的直管里这种使整个气体向某一定方向迴轉的作用力是不存在的。

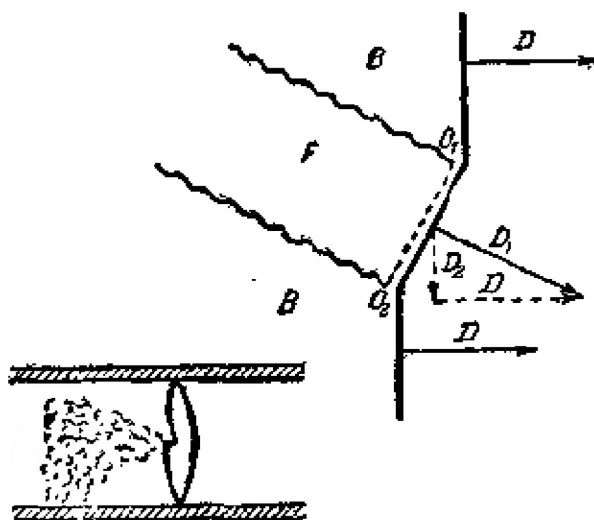


圖 40.

蕭尔金推測过①，在波的光亮区里，有一种作螺旋狀推进的破折口，見圖 40 下面的示意圖。这种破折口放大了画在該圖的上半部。

① 蕭尔金著:"关于螺旋爆震的理論"，苏联科学院报告，47，501，1945。

澤尔道維奇的文章① 提出了破折口处的气体燃燒机構，以及可以据以計算螺旋角的量方面的理論。

这样，我們就假定，在爆震波的光亮区中有一段是与管軸綫斜成一定角度的，因此如果取一个与軸綫相垂直的截面来看，那末在光亮地区附近，波大概就成圖 40 所画的那样(該圖的下半表示火焰在整个管子里的推进情形)。

爆震波的 B 段沿管軸作直綫运动，它的速度是这种給定混合气的正常爆震速度 D。破折段 O_1O_2 处局部过度压縮，它具有較大的推进速度 D_1，但它的推进方向与管軸綫成一定的角度。D_1 的軸綫方向分速根据定型的条件应等于 D，而与管軸綫相垂直并与过破折点的半徑相垂直的那个分速 D_2，是使破折口順着管子的圓周作等速运动的。这兩部分运动(前进及旋轉)合起来就成了螺旋推进。因为 D_1 大于 D，波头上破折处的压强是高于平面部分的压强的。因而溫度也較高，这就使破折处混合气的燃燒速度高得多。

从 F 区开始的燃燒，逐漸激發那已为震波压縮过的 B 区，然后整个混合气都燒起来了。因此，如果划兩个控制面，一个在波头之前，另一个在反应已經結束的地方，那末普通用于平头爆震波的整体的質量平衡关系、动量平衡关系和能量平衡关系，在螺旋爆震上还是适用的。在 § 11 里我們就这样用在混合气中的反应推进上，那时混合气是用一系列的火花来燃点的，那时火焰的厚度由反应开始起一直算到全部混合气反应完畢的截面为止。

根据整个运动的定型要求，我們就在这种場合下也能得到相切的条件，这是指管截面上的平均值而言的。联結初始狀况和終了狀况的直綫和完全燃燒的絕热綫相切。因此，如果像通常那样略去損失，那末平面爆震波的推进速度就等于 $D=\sqrt{2(k^2-1)Q}$。

現在假設混合气的反应热量 Q 少到了这种地步，在平面震波

① 澤尔道維奇著："关于螺旋爆震的理論"，苏联科学院报告，52，147，1946。

波头上，狀况 B 的温度所产生的是很低的反应速度。这应該使反应区(波头)的厚度变得很大。其实这时所得到的幷不是拉長的反应区(波头)，而是螺旋爆震，即在震波的破折处进行燃燒，那里的温度較高。

关于螺旋爆震的解釋，基本的想法是这样的：如果平面的震波波头上溫度不高，那末为平面波所压縮过的混合气，其化学反应必进行得很慢，这样就要形成很厚的反应区。为平面震波所压縮过的混合气，其压强約为常速直綫与反应产物絕热綫的交点所对应的压强的兩倍。因此，被压縮过的气体层可以起活塞的作用，它能帮助过度压縮的爆震波的推进。破折口就是这种过度压縮波，这种波的产生是由于，在破折处反应产物为已經压縮过而尚未起化学反应的混合气所包圍。

讀者如想知道爆震波破折处的詳細研究的結果，可以去參看前面提到的澤尔道維奇那篇文章。我們这里只給以簡略的解释，在質的方面能得出正确的結論而已。在圖 40 上，始于破折口(F 区)的燃燒产物是被經震波压縮过的混合气所包圍着的。因此，在 F 区，$p_F = p_B$[①]。在圖 41 中上面那条絕热綫上，F 点所代表的是这样一种爆震情况，这时混合气后面受活塞压縮，致使反应区后面沒有膨脹波，有的是压强为 p_F 的混合气[②]。这种爆震波的速度便大于热力学的爆震速度，$\sqrt{2(k^2-1)Q}$。

过度压縮的爆震波不可能走到支持它的震波之前去，但因为波的速度和破折口速度不相同的緣故，破折口速度的指向应与速度 D 成某个角度。这个角度显然应滿足这样一个条件，即 D_1 在管軸綫上的投影应等于 D；这样整个过程才是定型的。合前进运动与旋轉运动便得螺旋綫。

① 下面將証明，这个条件并不是完全准确的。

② 參看 § 10。

如利用基本的圖綫圖 41，那就很容易算出 p_F 来，还有 D_1 也可以一起算出来。

現在来看一个数字例子[1]，这个例子我們在 § 11 里講到管中燃燒时曾研究过。这个例子的 $p_0=1$，$v_0=1$，$Q=45$，$\frac{c_p}{c_v}={}^6/_5$。計算混合气的初始压强时，沒有把它当作零看，因此，热力学的爆震速度不是按 $D=\sqrt{2(k^2-1)Q}$ 算出来的 6.29，而是 6.48。在这个例子中，平面震波的压强 p_B 等于 38.11。所以按前面的假設，F 区中的压强 p_F 也等于 38.11。在切点 J，压强等于 19.53，比容 $v_J=0.559$。根据 p_B 和 p_F 的値算下来，$v_B=0.117$，$v_F=0.331$。

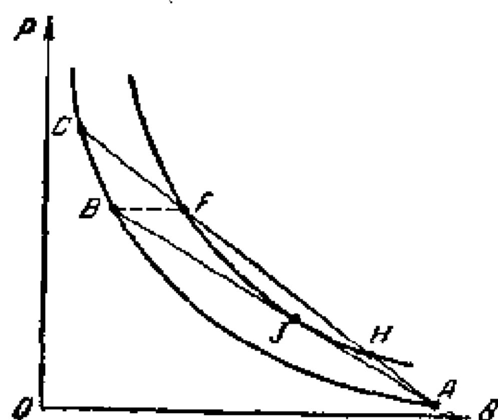


圖 41.

有了 p_F 和 v_F 之后，我們就很容易算出破折口处的全速 $D_1=\sqrt{\frac{p_F-1}{1-v_F}}=7.45$。这个速度应有一个軸綫方向的分速等于 $D=6.48$，因此，破折口的法綫与管軸之間的角度，即螺旋綫的角度，等于 $\arccos\frac{6.48}{7.45}=29°$。

此外，我們看到反应产物的狀况 F 是得自混合气狀况 C 的，C 是經斜震波压縮后达到的狀况。在圖 41 中，这个狀况是在直綫 AFC 上。狀况 C 的参数如下：$p_C=50.4$，$v_C=0.111$，$T_C=5.59$；T_C 較 T_B 高 25%；要出現螺旋爆震，在溫度 T_B 下反应很慢，而在溫度 T_C 下反应又得很快，这一点是一定要成立的。

其实应該滿足的还不仅是压强相等这一个条件，而且还要有 F 与 B 兩区的切向分速相等。取一个与破折段爆震波其同以速度

[1] 这个例子是阿列茲金 (M. C. Арецкин)計算出来的。

D_1 在运动的坐标系，如圖 42 所示。因为切向分速保持不变，所以 B 区中流綫的方向应与 F 区的不相同。因而 F 与 B 兩区之間应有某些不連續面存在。关于这些不連續面相交的詳細情况可以参考一些專門的研究著作①。我們这里只預备指出，除了上面已經說到的正震波和斜震波之外，过交点还应有一道斜波和一个平行于流綫的面，在这个面上，压强是連續的，而速度値則有个突躍（所謂切向突躍）。这是为了在一切不連續面上滿足各条守恒律所必要的最低数目的不連續面。

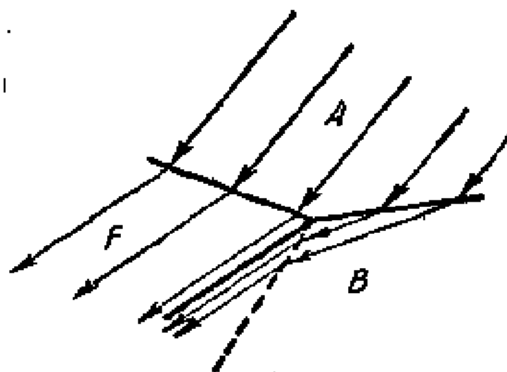


圖 42.

在前面提到的那篇澤尔道維奇論文里就是按这样的不連續面系进行計算的，算出来的螺旋与管軸之間的角度大于按簡化計算所得的角度。他的計算是更接近于实驗結果的。

現在我們来研究一下螺旋爆震的产生条件。因为螺旋爆震的波头仅占管截面的一小部分，波头上允許的反应时間比正常爆震少得多了。为了要实現螺旋爆震，必須有更多的活躍热能；波头上的混合气在更高的溫度下反应速率的增高，必須超过气体在破折区停留时間的減少，如果拿这兩个时間同普通波的对应时間作比較的話。

前面講过的爆震波推进極限的一元理論，只适用于很低的活躍热能的情况；看来，$\frac{A}{RT_{燃}}$ 这个比値不应超过某个确定的数値，这

① 参看庫朗(P. Курант)与弗理德利赫(K. Фридрихс)合著："超音速流与震波"一書，苏联外文書籍出版社，1950；还可参看坎拜尔(C. Campbell)、李特尔(W. B. Litter)与惠特諾斯(C. Whitnorth)合著："爆炸波中的压强量測"，文載 Proc. Roy. Soc. A 137, 380, 1932。

样爆震才能保持为正常的爆震，直到消灭为止，这样才能全部应用前面說过的極限爆震理論。

$\frac{A}{RT_{\text{爆}}}$的临界値直到現在还沒有求出来。但实际上看样子在一切研究过的混合气里，其$\frac{A}{RT_{\text{爆}}}$之値都比临界値为大，并且在消灭極限上，爆震是具有螺旋特性的。

我們来看一下，增大管直徑对極限的范圍以及最長的可能反应时間有些什么影响。这可以从本节关于螺旋爆震的概念出發。

設 τ_C 是螺旋波头上反应完成所需要的时間，$b_{\text{г}}$ 是螺旋波头的尺寸。那末为了在螺旋波头上有可能进行燃燒，$\frac{\tau_C}{b_{\text{г}}}$ 便应小于某个一定的数値。給定兩相鄰波头之間的距离 h 之后（如果是單头螺旋爆震的話，$h=\pi d$，也就是波头本身繞管一周的距离），$b_{\text{г}}$ 愈大，螺旋波头的溫度 T_C 愈低[1]；T_C 决定于$\frac{b_{\text{г}}}{h}$，而 τ_C 也决定于$\frac{b_{\text{г}}}{h}$，τ_C 随$\frac{b_{\text{г}}}{h}$的增大而增大。

由此得下列的結論：当 τ_C 很小时，小的 $b_{\text{г}}$ 和小的 h 是可能存在的，在管子里，同时可以存在許多个螺旋波头，管直徑愈大，波头数愈多。管直徑 d 給定之后，τ_C 値增大，可能的波头数便减少。在某些 τ_C 値上，只可能有一个波头，那时 $b_{\text{г}}\sim h$；d 愈大，單头螺旋爆震的 τ_C 値便愈大。τ_C 再大，螺旋爆震就不可能發生了。所以，接近極限时，螺旋波头数是减少的。

螺旋爆震的極限应随管直徑增大而放寬。τ_C 値是波头內的燃燒时間。进行螺旋爆震时，一切管截面上全部混合气的全部反应时間 τ_m 决定于火焰内已燃气扩延及整个截面所需要的时間。在給定的管子里，引燃的点愈多，即螺旋头愈多，τ_m 愈短。当螺旋波头少到接近于極限爆震时，反应时間 τ_m 达最大値，那时是由一点燃燒起扩延及整个截面的。显然，τ_m 是与管直徑成正比的。

---

(1) 显然，如果螺旋波头的厚度接近于螺旋波头之間的距离，那末压强和溫度便分別接近于平面爆震的数值，即非螺旋爆震的压强和溫度。

因此，由这里所講的概念可以推得一个意外接近于一元理論的結論：管直徑增大时，極限范圍扩大，且最大反应时間延長。

合于螺旋爆震的混合气中反应推进情况，曾在澤尔道維奇和什列雅宾托赫(И. Я. Шляпинтох)合著的文章[1]里論到，那篇文章研究了由震波燃点混合气的燃燒情况，而震波是由直徑为5.5毫米的高速飞行的子彈（子彈鈍头前面所生的震波）在直徑为30—35毫米的管中造成的。

事实上，兩种情况下燃燒都起于很狹(同管直徑比起来很狹)的区域内，接下去的反应是在从燃点区扩延的火焰中进行的。在燃点子彈的攝影記录上，發現反应产物的光亮区成条紋狀的結構。这种現象可作如下的解释，子彈所产生的震波在管壁上反射出来，在管軸綫上形成震波的累积。凡是震波累积之处，必增强燃燒气体的亮度。子彈在前面运动，子彈后面許多这种亮点各在一定的距离上以同一指向随着运动。在攝影記录上得到的是一系列的条紋；第一条是燃点的波头，第二条是第一个亮点，余类推。

在螺旋爆震理論里，关于紧靠震波波头之后有个压强升高区存在这个概念極为重要。混合气就是在这个区里进行燃燒的。因此直接从实驗上去揭發这个压强升高区的存在，甚或想办法間接証明这个区存在，都是極要紧的。柯伽尔可和澤尔道維奇做了这种实驗[2]。

具有高压 p_A 的气体層，其数量及厚度是与反应时間 τ 成正比的。管直徑愈大，摩擦和散走的热量愈少。在最簡單的假設之下，假設化学反应速率仅与溫度 T_A 有关，且整个管截面上的反应是

---

① 澤尔道維奇和什列雅宾托赫合著："震波中混合气的燃燒突躍面"，苏联科学院报告，65, 871, 1949。

② 柯伽尔可和澤尔道維奇合著："論混合气的燃燒"，苏联科学院报告，63, 563, 1948。

均一进行的，那就可以得出結論来，爆震只在$\frac{\tau}{d}$小于某特定值时才可能推进。根据这个論点，用直徑为 305 毫米的管子做了爆震的研究，这个管徑約是普通实驗室用管徑的 10 至 15 倍。可以期待，在这种管子里，τ 較長的那种在普通管子里不会爆震的混合气，也可能爆震，同时由于 τ 增大了，在極限爆震上得以用实驗方法發現波头上高压(p_A)的压縮气体層的存在。如前所述，在大直徑的管子里，确实观察到了爆震極限范圍的增寬，也就是說，具有那种 τ 值的混合气本来在狹管中不会产生爆震的，現在也能产生爆震了。

为了量測爆震波中的压强，在鋼管的端头安裝一些小銅柱，从銅柱的縮短上去量出压强来。

为了闡明这种量測的意义，我們来看一下圖 43 上所画的爆震波中的压强曲綫。这是一种强烈的爆震混合气，化学反应在很短促的时間，約在 10^{-6} 至 10^{-7} 秒这样一段时間内完成，压强下降則在長得多的时間，約 10^{-3} 至 10^{-4} 秒这样一段时間內进行，这时間与爆震管的長度有关系。仪器所記录下来的压强值与仪器的慣性有关，也就是說与仪器动作起来所需要的时間有关。例如，仪器需要 10^{-7} 秒才能动作起来，那

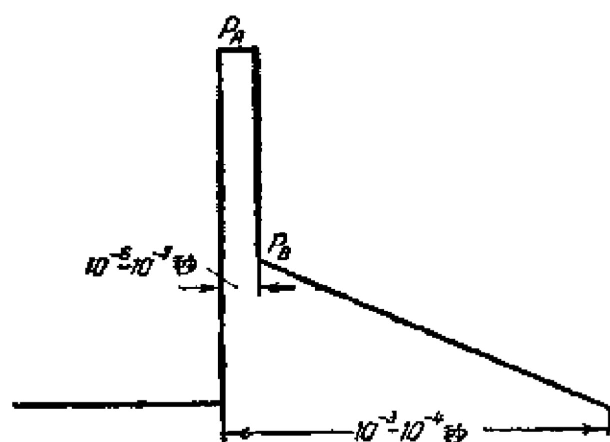


圖 43.

它是能記下压强 p_A 来的。假定它动作起来需要較此为長的时間，那它所記录的只是居間的压强，仪器的慣性愈大，录得的压强愈低。現在我們設想压强 p_A 的持續时間增長，这在其他的条件都不变的前提下，必使仪器所記录的平均压强值比以前記录的高得多。

所以，愈接近極限爆震，作用时間 τ 愈長，仪器所記录的平均压强值，应該与反应終了那一瞬間的压强 p_B 相差得愈多，应該愈接近于燃点那一瞬間的压强 p_A。

用氫与空气的混合气做爆震实驗，爆震波在管端头有反射时，实驗量測所得到的压强画在圖 44 上。

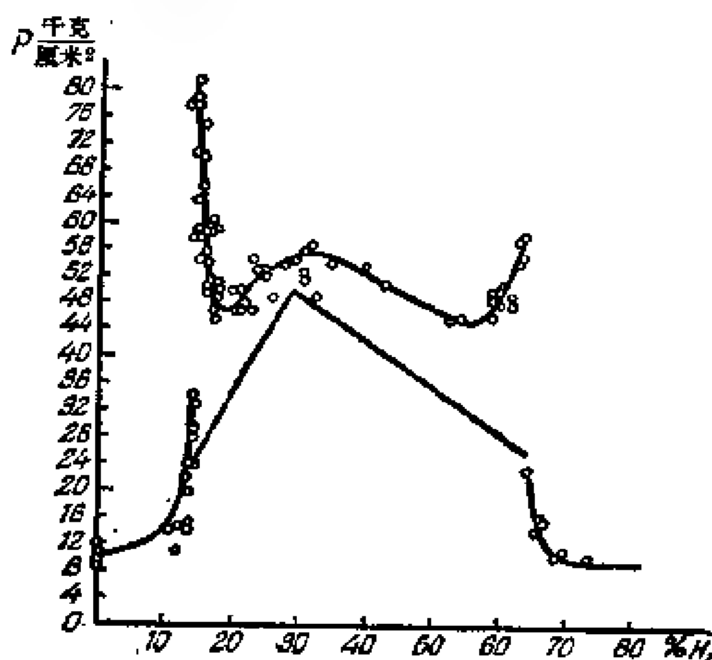


圖 44.

折綫是按波中的化学反应在瞬間完成这样一个假設計算出来的对应关系。量得的与計算出来的压强差得这末远完全說明了在爆震波头上有压强升高区存在，并証明了接近爆震推进的極限时压强升高区增厚，以及这种高压区厚度对爆震波的破坏作用的影响。爆震波的破坏作用就是波給障碍物的冲量，即其压强与作用时間的乘积。

§17. 粗糙管中的爆震

講到有損失的爆震理論时，我們已經闡明爆震是有相当狹的極限的，并發現，在光滑管中爆震只能以較熱力学速度 $D=\sqrt{2(k^2-1)Q}$ 低得有限的速度推进。在这个意义上，摩擦損失和散热損失都可以看作是小扰动，而且这个"小"应作如此了解：只要有損失的爆震还可能存在，那損失就不該使速度降低太多。这

里提醒一句，震波波头上能量释放的速率是决定于温度的某个方次的，而温度则与波的速度平方成正比。只要速度略略降低一点，化学反应速率就会大大下降，与此相应的是，波头上释放出来的热量便会小于损失的热量，这时，如我們已經知道的，爆震波的推进就不可能存在了。

以上說的这些道理对粗糙管中的損失作用都适用。通常損失数値的大小用改变管直徑和初始压强的办法加以控制。蕭尔金在他研究粗糙管中爆震推进的一文中提出了一种極饒兴趣的增加損失的方法。蕭尔金在爆震管子里繞上各种直徑的鉄絲成螺旋狀，以增大該管的流体动力阻力。用这种方法，阻力系数决定于鉄絲的直徑以及每一厘米管長所繞的鉄絲圈数。

蕭尔金所用的实驗設备示意圖画在圖 45 上。产生于金屬管段（該段長約一米）的爆震波推进到玻璃管中去，玻璃管長約兩米。在玻璃管的后半段繞上鉄絲，造成粗糙度。在同一張照片上記录光滑管和粗糙管兩部分管子里的爆震推进，这样才可能很准确地量出粗糙管中爆震速度同光滑管中速度的对比（准确到～1.5%）。

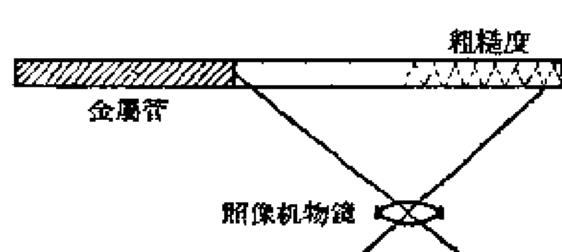


圖 45.

实驗結果列載在表 V 上。

他用的初始压强都等于一个大气压。k 是加糙鉄絲的直徑与管半徑的比値，n 是每一厘米管長上所繞的鉄絲圈数，$D_{光}$ 是光滑管段中的爆震速度，$D_{糙}$ 是粗糙段中的爆震速度。特別値得注意的是爆震速度可以同热力学的爆震速度相差到 40—50%。看表 V 可知，給定混合气的成分之后，光滑管中只有一个一定的爆震速度，在粗糙管中则随所用的粗糙度不同而可以任意得到，从热力学爆震速度（等于光滑管中的爆震速度）起直到热力学速度的一半

表 V. 粗糙度对各种混合气爆震速度的影响(蕭尔金的实验結果)

混合气	管直徑	k	n	$D_{光}$ 米/秒	$D_{糙}$ 米/秒	$\frac{D_{糙}}{D_{光}}$(%)
$2H_2+O_2$ …………	10.0	0.25	3.6	2767	2352	85.5
		0.43	2.4	2820	1608	57.0
$2H_2+O_2$ …………	7.0	0.20	5.1	2853	2330	81.7
		0.29	3.9	2820	2170	77.0
		0.43	3.2	2795	1859	66.5
		0.61	2.4	2741	1804	65.7
$2.07H_2+O_2$ ………	4.5	0.13	6.6	2915	2842	97.6
		0.31	5.0	2940	1760	59.9
		0.44		2974	1685	56.7
$C_2H_6+3.5O_2$ ……	10.0	0.20	4.2	2110	1872	88.7
		0.30	2.5	2050	1755	85.7
		0.43	2.4	2142	1478	68.8

为止中間任何一个速度。相对粗糙度愈大，混合气的成分愈接近極限爆震的成分，推进速度下降得愈厉害。

蕭尔金和紀参特(Днцент)在粗糙管中得到了一种新型的燃燒，这种燃燒在性質上很接近爆震。

一氧化碳与空气的混合气在光滑管中，它的火焰平均推进速度是每秒 2 米。粗糙管能大大提高推进速度。火焰速度可以增加到每秒数百米，然后以几乎定速(但沒有像爆震那样严格的定速)推进下去。快速燃燒能产生很大的机械破坏作用。例如它可以裂破厚壁的玻璃管，且破裂时有剧响。在給定粗糙度的管子里进行重复試驗时，在 100 至 200 米/秒之内，火焰能很好地重复最大速度和平均速度(平均速度是指从着火处起至另一管端为止的平均速度，在 50 至 100 米/秒之間)。紀参特和蕭尔金的实驗結果載在表 VI 上。

这个表上的 D 是管子的内徑，d 是绕繞鉄絲的外徑，n 是每一厘米管長上所繞的圈数，U_m 是火焰的最大速度，U 是火焰的平均

表 VI. 粗糙管中一氧化碳与空气的混合气的火焰速度
(紀参特与蕭尔金的实験結果)[1]

混　合　比	D（毫米）	d（毫米）	n	U_m（米/秒）	U（米/秒）
50% CO+50% 空气 ……	17	光管	-	—	2
50% CO+50% 空气 ……	17	17	3.5	無燃燒	
50% CO+50% 空气 ……	17	14	3.4	無燃燒	
50% CO+50% 空气 ……	18	11	3.5	790	188
50% CO+47% 空气 + +3%H_2 ……	18	11	3.5	1808	582
50% CO+50% 空气 ……	17	9.1	3.4	1285	318
40% CO+60% 空气 ……	18	11	3.5	1470	—
40% CO+58% 空气 + +2%H_2 ……	18	11	3.5	1820	415

速度。

所以在粗糙管里旣可以观察到非常低速的定型爆震，又可以观察到非常高速的非定型燃燒。澤尔道維奇对爆震速度的下降作如下的解釋[2]。起初火焰大致發生在一圈鉄絲附近，后来火焰向气流內推进，如圖 46 所示。燃燒开始于管壁，然后逐漸占滿整个管子，火焰成錐形。反应区显著地增長，約处于 AA' 与 BB' 兩控制面之間。

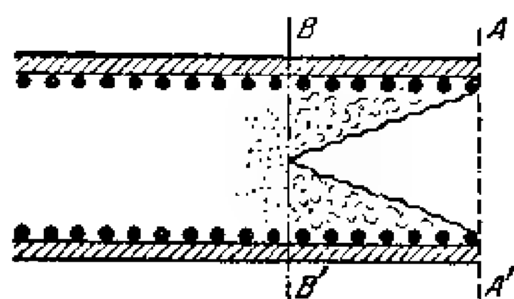


圖 46.

这种燃燒过程离一元情况远得很了。反应区的厚度不是像光滑管中爆震的一元推进那样，直接按动力学决定，而是按由管壁至中心的反应速率决定的，即按已压縮混合气的燃燒速率决定的。但就相对坐标系而言，即就与震波 AA' 一起运动的坐标系而言，燃

(1) 紀参特和蕭尔金合著："粗糙管中的快速燃燒"，文献物理化学杂志，19, 21, 1949。

(2) 澤尔道維奇著："气体燃燒及爆震的理論"，苏联科学院出版社，1944。

燒区是亞音速的。因此，靠近 AA' 与 BB' 之間鉄絲圈的气体的任何扰动，都会影响到震波的运动，就像整个气体的扰动一样。換句話說，在相当長的距离 AB 之間鉄絲圈上的摩擦損失大大地降低了爆震速度。

現在着火的不是震波的整个平面波头了，而只是在鉄絲圈附近起了变化的一部分震波，在鉄絲圈附近，由于震波被反射的結果，震波的波幅急剧地增大了，因而把混合气的温度提高得特别厉害。这种机構的存在就可以解释，何以蕭尔金所观察到的粗糙管中爆震速度低得那末多（約为 900 米/秒）。但蕭尔金在粗糙管中还观察到推进速度更低的火焰（約 500 米/秒），那就可不能作这样的解释了，因为那样弱的震波在剛体障碍物上反射时，温度的升高程度已不足以引起化学反应。

为了了解这个現象，我們可以回想前面講过的一种介乎最大燃燒速度与最低爆震速度之間管中人工燃点速度的气体燃燒过程。那时不計損失，我們看到，定型爆震是不可能的，在燃点波头前面有震波形成，震波比人工燃点的火花走得快。因此，整个过程不是定型的。

但为震波所压縮过的混合气并沒有变化，燃燒产物的狀况也沒有变化。在这个意义上，可以把这种燃燒当作定型的看待。轉到等于自發爆震速度的燃点速度时，我們就可以把它当作气体的緩慢燃燒看待了，这种緩慢燃燒是預先为震波所压縮过的。

設想有一种情形，損失大到使震波不可能跑到很慢的燃点（～500 米/秒）之前去。管子里必形成气体速度的分布形狀，即中心的气体速度最大，边上最小。显然，这种分布形狀的推进速度是为最大速度所决定的。就在这种情形之下，我們所談的已經是非一元的燃燒过程了，反应区大大地拉長了。

这种过程已經不是爆震这个詞原意所指的爆震了：这时不可

以說由震波的压縮而产生气体的燃燒。这时，火焰推进的机構，是与速度分布形狀上最大速度部分反应产物使新鮮混合气燃燒，这个轉移过程有关的。在那里，燃燒着的气体彷彿跑在前面，并把其余尙未受扰动的气体燃着了，而且火焰的推进是陽紊流流态的。燃燒着的气体之所以能跑到前面去，是因为当整个震波作强烈的滯止时，其个别段落的介質运动速度可以等于波推进的总速度（而在平面震波則永远是 $w<D$ 的）。

虽然这兩种非常态的爆震都是毫無疑問地看到过的，但这兩者与正常爆震之間的界限直到現在还沒有能划出来。極需要給在粗糙物附近引起的真实爆震与非常态的快速燃燒（这是由于气体的速度分布不一而引起的）二者之間确立一个物理的分界綫。

§18. 正常燃燒到爆震的轉变

爆震时，混合气在震波的作用之下进入化学反应，震波把混合气压縮了，把它的溫度提高了。因此，引起爆震最簡單最迅速又自然的方法是在可爆炸的混合气中制造一个强有力的震波。这种波簡直能在瞬間把混合气燃点起来，这就是爆震了。

要制造一个强有力的震波，最方便的法子是用一点硝酸鉛或雷汞之类的炸藥放在盛混合气的管子里，或是其他盛混合气的容器里。实驗証实，在这样的安排之下，就在緊靠炸藥的表面处混合气在瞬間就發生爆震。

如果这种可爆炸的混合气不用震波燃点，而用其他緩慢加热的办法，例如，电流燒金屬絲、电弧、或是用弱电火花，那情形会怎样呢？

那时，混合气便为正常推进的火焰所燃点，而进行燃燒，这时由于傳热的作用使燃燒由一層气体傳到另一層去，压强則几乎到

处是一样的。

正常燃燒轉变为爆震的显著現象是这样的：火焰在長管中推进时，速度会逐漸增大，走到离燃点处一定的距离之后，就变成爆震了。从表 VII 和表 VIII 可以看出来，由燃点处至發生正常爆震之处，这段距离是随混合气初始压强的增高而縮短的，是随混合气初始溫度的增高而增長的。

表 VII. 压强对于燃点处至發生爆震处距离的影响
(索柯利克和蕭尔金的实驗結果)①

混合气种类	距离單位为厘米 压强單位为毫米汞柱			
	p(毫米)30	100	200	300
$2H_2+O_2$ …………	—	—	78	52
CH_4+2O_2 …………	—	134	78	51
$C_3H_8+3.5O_2$ ……	—	102	58	46
$C_6H_{14}+9.5O_2$ ……	105	48	32	27
$C_6H_6+7.6O_2$ ……	—	54	—	47

表 VIII. 各种初始溫度下点火处至發生爆震处距离
(拉菲特(Lafitte)的实驗結果)②

$2H_2+O_2$		CH_4+O_2	
初始溫度(°C)	距离(厘米)	初始溫度(°C)	距离(厘米)
15	60	15	55
120—130	73	160—180	74
160—180	78	200—310	90
300—320	一米長的管子里未生爆震	340—350	一米長的管子里未生爆震

① 索柯利克和蕭尔金合著："混合气中的爆震。爆震速度随压强的变化"，文載物理化学杂志，5, 1459, 1934。

② 拉菲特著："溫度对于爆震波形成的影响"，文載 Comptes Rendus, 186, 951, 1928。

爆震前期的長度不仅决定于原混合气的狀况，而且还决定于火焰推进时的流体动力学条件，即决定于管直徑、管壁情况（光滑的还是粗糙的）等等。

管直徑对于点火处至發生爆震处距离的影响，列載在表 IX 上。粗糙度的影响下面再說。

表 IX. 管直徑对于至發生爆震处距离的影响（管長 250 厘米，混合气是 CH_4+2O_2）（蕭尔金的实驗結果）
（$p_{初}=400$ 毫米，$T_{初}=15°C$）

管直徑（毫米）………	13	32	38	48
至發生爆震处的距离（厘米）…	112	117	150	220

至發生爆震处的距离与混合气的成分大有关系：用不起反应的气体冲淡混合气，或是大大地增多一种成分，就会增大这个距离。应該指出，并不是任何成分的混合气都会轉化出爆震来的。成分有个臨界値，初始压强也有个臨界値，这称为爆炸極限，过了这个極限，燃燒就不会自动地轉变成爆震。成分的爆炸極限和压强的爆炸極限曾由李文和索柯利克研究过[1]。量測爆炸極限所用的实驗設备画在圖 47 上。兩段玻璃管 F 和 F' 至点火处的距离一个是 11 米一个是 32 米。整根管長是 40 米。管子这样長是为了有可能無誤地决定

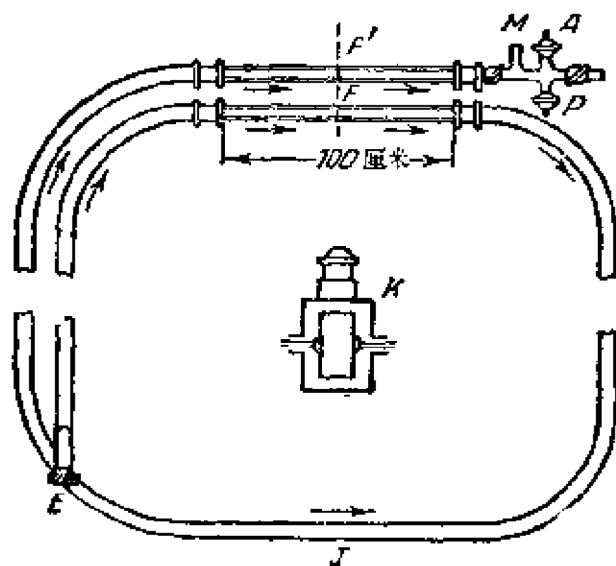


圖 47.

[1] 李文和索柯利克合著："混合气的爆炸極限。I. 氫与空气的混合气之爆炸極限"，文献物理化学杂志，7, 571, 1936。

推进着的爆震波的定型性。有几种混合气的爆炸極限值引載在表 X 上。

表 X. 各种混合气的爆炸極限值，原始压强都是一个大气压（李文和索柯利克的数据）①

混合气	燃料在混合气中的比例	
	下限	上限
H_2 与空气 ········	27	35.5
H_2 与 O_2 ········	23	85
CO 与 O_2 ········	60	72
CH_4 与 O_2 ········	10	60
C_2H_2 与空气 ······	6.6	15.3

仔細研究燃燒轉变成爆震的照片后發現，这个現象絕不能看作是反应的推进速度連續增加，由正常燃燒速度增加到爆震速度的結果。剛燃点时确实是正常燃燒在推进。燃燒速度逐漸增大，但并不会达到爆震速度。爆震波是突然發生的，它的發生处在照片上是很容易辨認出来的，因为爆震波比燃燒亮得多。爆震波發生时，就在同一处还出現第二个波，这是个在爆炸产物中推进的震波。这个波称为副爆震波。在爆震發生点往往發現管子破裂或压强剧增的其他标志，其压强甚至比以后推进的爆震波里的压强还要高一些。

龐(Бон)改进了攝影技术之后得以發現，在爆震發生点，爆震波的燃点和推进是出現在火焰前面某个距离上的，即那时火焰还沒有达到爆震發生点。可見由燃燒轉变为爆震并不是一个連續的过程，这是和下列事实相对应的：燃燒与爆震不仅在推进速度的量上有区别，而且在反应推进的机構②性質上也有区别。

爆震發生的一瞬間是什么样的？

燃燒时，气体發生膨脹，因而火焰会使气体产生一种运动，等

---

① 同前頁注；李文和索柯利克合著·“混合气的爆炸極限”。3.“一氧化碳与甲烷混合气的爆炸極限”，文載物理化学杂志，8, 767, 1936；又李文、布列斯克尔和索柯利克合著：“乙炔-空气混合气的爆炸極限”，文載物理化学杂志，10, 688, 692, 1937。

② 这不包括粗糙管中用另一种推进机構进行的特殊爆震在内。

于一个活塞以与气体速度成正比的速度作同方向动作所引起的运动。这我們在 § 11 里已經証过了，那时研究的是火焰推进时所产生的那样一种气体的非定型运动和那样一种震波。在現象上，这里与 § 11 中簡單得多的問題不同之处在于，發生爆震时，火焰的推进速度是愈走愈大的。

火焰每加速一次，便有一个新的弱震波由火焰波头發出去。随着火焰速度的增大，火焰表面上气体的压强不断增高，震波便是傳播这个增加量的。

圖 48 上画了火焰途徑的示意曲綫 $ON_1N_2N_3N_4D$，每一点有一条特性綫(弱震波)OA, N_1A, N_2A, $\cdots$, 伸出去。沿每一条特性綫压强各是常数值。特性綫的推进速度等于 $w+c$，火焰速度愈高，这个 $w+c$ 的值愈大，因为 c 和 w 都随火焰速度的提高而增大。因此，后發出的震波，例如从 N_3 發出的震波必能赶上先發出的震波，例如从 N_2 發出的。在 xt 平面上，这就造成特性綫相交的形势。为了簡單起見，圖 48 上画的是所有的特性綫都交于同一 A 点的情形，当然，事实未必如此，不过在实質上却沒有什么不同。

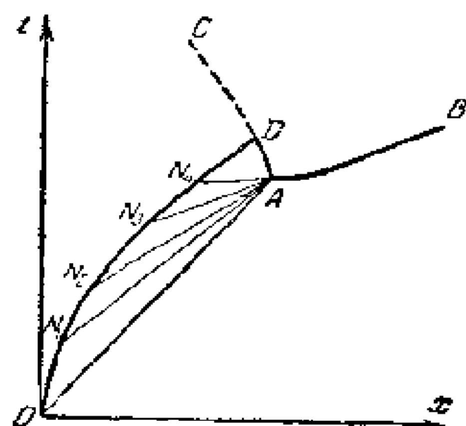


圖 48.

要紧的是，火焰前的气体，例如 N_4 点附近的气体，被許多接連的震波所压縮，气体的狀况差不多是按泊松絕热变化的。在特性綫相交之处，所有的弱震波集合成为一个强有力的震波。这时 A 点的压强同 N_4 比起来并沒有更升高，甚至还有点下降。但按兩貢紐絕热关系說，一个集中的震波即使压强更低些也会把气体的温度提得很高，比許多弱震波的总合所提高的温度高得多。

这就解釋了为什么最亮的地点，即混合气被压縮所燃点(不是

靠火焰的傳热而燃点)的地点会在火焰前面一定的距离上。

所以，在燃燒發生点的左右都有可爆炸的混合气存在。从爆炸的气体那里，即 A 点四周，向右有爆震波 AB 推开去，向左也有一个爆震波 AD 推开去，到了 D 点与火焰头相遇后变成震波 DC（副爆震波），DC 是在爆震的产物上推进的。

我們这里把火焰的加速簡單地当作实驗的事实，然后据以解释强震波的形成，以及爆震波的产生。然而最困难的問題还在于解释火焰加速的原因。

起初，用"弱"燃点（热力的燃点）时，燃燒以一定的速度作正常的推进，其速度决定于火焰内的化学反应动力学以及气体的傳热率。在火焰推进的过程中什么东西改变了？火焰为什么增加速度？火焰高于正常速度推进时，它推进的物理机構是什么样的？

蕭尔金对这些問題提出了正确的見解①。

火焰从管子的封閉端头作正常的推进时，燃燒产物是靜止的。如果火焰相对于初始混合气的正常速度是 u，燃燒时的膨脹度是 n，那末火焰相对于燃燒产物的速度，也就是相对于管壁的速度（就是在照片上看到的速度）等于 nu。这时未燃的混合气在火焰之前以 $w=(n-1)u$ 的速度在向前运动。火焰使气体發生的运动，火焰所产生的波，就正像有个活塞以 $w=(n-1)u$ 的速度在推进一样。

正常的燃燒速度 u，在空气的混合气里不超过 2—3 米/秒，在氧的混合气里不超过 10—15 米/秒。拿燃燒能量極大的混合气 $2H_2+O_2$ 来說，它的正常速度約是 10 米/秒，n 約等于 8，于是 $(n-1)u$ 約是 70 米/秒。气体以这样的速度运动，使震波所提高的溫度总共达 20—30°，压强提高 0.2 大气压。显然，压强和溫度

① 蕭尔金著："关于管中混合气發生爆震的理論"，文載苏联科学院报告，23,636，1939。

这一点点变化不可能是火焰加速的理由，燃燒的条件不会有什么显著的变化。

蕭尔金的主要想法在于，火焰的加速不是由于压强和温度变化的緣故，而是由于火焰之前气体有运动的緣故。这时，由于 $\Delta p \ll p$, $\Delta T \ll T_0 \ll$ 燃燒的 T，气体的运动速度 w 甚至大于燃燒速度。

显然，整个气体一起运动的話，那是不会改变火焰的推进条件的①。

因此，主要的原因須到混合气相对于管壁的运动上去找，須到管壁对气体的摩擦使气体运动所發生的变化上去找。这时，产生了气体的紊流运动，尤其重要的是气体的运动形成了一定的速度分布形狀，也就是說，管中气体的运动速度不是均一的了。

在詳細研究加速的机構之前，我們再看看蕭尔金的实驗，他的实驗指出，气体对管壁的摩擦起决定性的作用。如果同封閉端头处燃点(圖 49, a)相比較，在开敞端头处燃点(圖 49, $б$)要产生爆震就难得多了，因为在后者同样的燃燒速度所引起的气体沿管子的运动弱得多：燃燒产物很容易向后走掉——从开敞端头走掉，尤其是燃燒刚开始推进，离开敞端头还不很远的时候，从开敞端头走掉就更容易了。

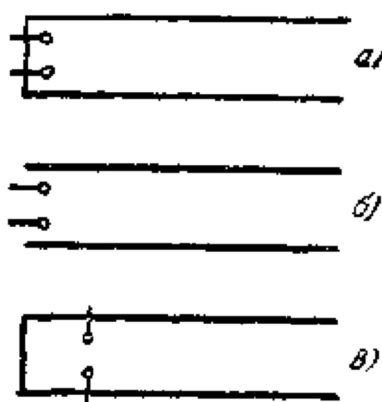


圖 49.

燃点处离封閉端头有一点距离(圖 49, $в$)，就比正在封閉端头燃点(圖 49, a)略易發生爆震，因为火焰起初从燃点处同时向左右两方向推进。这时單位时間內燒着的混合气变成兩倍，也就是說

① 关于整个气体运动的关系前面已經討論及了：火焰相对于冷混合气的正常推进速度是 u，火焰相对于管壁的推进速度等于 nu。

燃燒所引起的气体运动速度也是兩倍。

發生爆震处至燃点处的距离随管直徑增大而增大。这个距离(約为管直徑的 40 至 50 倍)与火焰在管中作定型运动时气流的稳定段長度是同一数量級的，所謂稳定段是指到了气流在整个截面上都已变成紊流，并且速度也已經成了一定分布形狀的那样一段管長。管壁的粗糙度应該会促使流速較早变成一定的分布形狀，这就使爆震更容易發生了。

蕭尔金用人工制造粗糙度的办法所做的实驗[1]，令人信服地証实了这一点。粗糙管中發生爆震的距离縮为 $\frac{1}{10}$ 到 $\frac{1}{20}$。由燃燒轉变为爆震的濃度極限范圍大大放寬了(參看 § 15)，有些可爆炸的混合气(例如 C_6H_6 与空气的混合气)在光滑管中原来不会由燃燒轉变为爆震，在粗糙管中也会轉变为爆震[2]。

現在再回到火焰在管內气流中的加速問題上去。現在我們来研究所謂稳定气流，那就是指管內長时間流动着的气流，时間長到紊流的流型和速度分布形狀都已成型，对应于給定的流速。

在这种气流里，首先可以求出某指定点上給定瞬間的速度值 $w(r, t)$ 来。这个瞬間速度值可以看作是兩部分速度之和：

(1)对时間而言的平均速度 $w(r)$，这只決定于該点到气流軸綫的距离 r, (2)陣变的速度 w', 这部分速度的平均值等于零；这样粗略地說来，就可以說 $w(r, t)$ 在 $w(r)+w'$ 与 $w(r)-w'$ 之間乱摆。最后，我們还需要用到最大的平均速度 $w_m=w(0)$，这是軸綫上的平均速度，还需要整个截面的平均速度。流过管子一切截面的气流总量，按定义等于 $\rho w\Phi$，式中的 ρ 是气体的密度，Φ 是管截面积。

---

[1] 蕭尔金著"管壁粗糙度对于混合气中發生爆震以及爆震在混合气中推进的影响"，文载实驗物理及理論物理杂志，10, 823, 1940。

[2] 有些場合下所發生的大概不是普通的爆震波，而是粗糙管所特有的那种快速燃燒，这时震波并不燃点可爆炸的混合气。

在这种紊流气体里怎样求火焰速度呢?

既然气流中各点的速度不同,每瞬間又各不相同,则显然,火焰的推进速度是为最快的一点的流速所决定的。在实驗室坐标系上,火焰在管内的运动速度是

$$u_I = w_m + w' + u_n,$$

式中的 u_n 是正常的速度。事实上 w' 应乘上一个系数 α, α 小于 1,因为每一流体微团的 w' 都是一会兒向前指一会兒向后指的。

我們一再指出过,例如在 § 11 中研究以人工的給定速度推进的問題时就指出过,那怕火焰上只有一点以給定的最大速度 u_I 在推进,由这燃点点向四面的扩延过程却也將迫使整个焰头以这个定速推进。

我們有兴趣的是單位时間內燃燒过的气体量。这个量决定于火焰速度与气体平均速度之差。这里再引用一个燃燒的有效速度 $u_{效}$,这个速度的算法是这样的:它乘上 $\rho\Phi$,得 $\rho u_{效}\Phi$,这就等于單位时間內燃燒过的气体。于是

$$u_{效} = w_m + \alpha w' + u_n - \overline{w}.$$

所以,气体的运动使燃燒速度增大 $u_{效} - u_n = w_m - \overline{w} + \alpha w'$。这个运动完全是气体对管壁的摩擦所造成的,因为如果沒有摩擦的話,气体便作为一个整体而进行运动,那时 $w' = 0$, $w_m = w = \overline{w}$, $u_{效} = u_n$。

速度的增加是因为火焰上走得最快的点走在气体平均速度之前,这一点后面的焰头便拉長,且变形了,因而使它的总面积 S 也相应地增大且变形了。面积的变化可以写为

$$\frac{S}{\Phi} = \frac{u_{效}}{u_n}.$$

在紊流里,$w_m - \overline{w}$ 和 w' 都与 $\overline{w}$ 成比例,所以

$$u_{效} = u_n + k\overline{w}.$$

另一方面,由于气体膨脹

$$\overline{w}=(n-1)u_{\text{数}}.$$

所以，如果 $$(n-1)k>1, \tag{18.1}$$

那末就这兩个方程找 $\overline{w}$ 和 $u_{\text{数}}$ 的共同解是找不到的。这就是說，燃燒时气体不可能有定型的运动。火焰加速促使气体加速，反过来气体加速又促使火焰加速，就这样循环下去直到火焰加速得使燃燒轉变到爆震为止。$n-1=7$，求 k。記得 k 的定义是：

$$k=\frac{w_m-\overline{w}}{\overline{w}}+\alpha\cdot\frac{w'}{\overline{w}}.$$

第一项在光滑管的数値自 $1/5$ 至 $1/4$，在粗糙管約为 $1/3$。第二项 $\frac{w'}{\overline{w}}$ 的值可以說永不会大于第一項的 20—25%。这个比値应从紊流理論去了解它：陣变的速度在数値上是与兩股相鄰气流的平均速度之差同一数量級的，这兩股气流之間的距离是所謂混合長度。一股气流上的一塊流体經混合長度，混到了另一股平均速度不相同的气流里去，在这期間它的速度不变。这样的速度差便是陣变速度。

估計了上述各量之后，我們看到，由于速度成一定的分布形狀（即由于有 w_m-w），实际上 k 值是相当大的，(18.1)这个条件是能滿足的，这就解释了火焰的加速。假定不考虑速度分布形狀，即假定

$$k=\alpha\frac{w'}{\overline{w}},$$

那末条件(18.1)是不能滿足的，所以只計及紊流的一方面是不够的。事实上紊流那部分速度是不大的，不超过 20—25%。

但在給定的燃燒速度下，紊流度是决定燃燒焰头形狀的。假定 $u_{\text{数}}$ 比 v_n 大好几倍，那末对应地，火焰面积 S 也必数倍于管截面积 Φ。如果沒有紊流度的話，这就会把火焰拉長使之成为很長的錐形；实际上，由于运动的紊流性質，火焰以 $u_n+\alpha w'$ 的速度沿半徑推进，这个速度比 u_n 大好几倍，所以圓錐是很短的。很大的面

积 S 分布在很短的距离上，这是因为这个面是折皺的，它有許多弯折和皺紋。

層流所形成的速度分布形狀比紊流的長得多。例如，泊稷侬（Пуазейль）層流的

$$k=\frac{w_m-\bar{w}}{\bar{w}}=1.$$

气体作層流运动时火焰为什么不加速呢？是不是絕不可以由此做出这样的結論，即由于某种原因速度分布形狀对气流中的火焰便不起意料中的作用？

事实上，气体作層流运动时，燃燒并不轉变为爆震，要轉变为爆震必須有紊流，这有另一种完全自然的解释。

直到現在为止，我們一直默認在管子封閉端头，剩下来的气体不会冷却：只有在这个条件之下，一面燃燒，气体一面不断地膨脹，气体运动才会赶到火焰之前去。在紊流中速度分布不勻的形成，火焰加速的形成，事实上都比处于管子封閉端头的靜止燃燒产物散走热量来得快，这就解释了紊流运动时可以不計冷却。但在層流运动时速度分布的形成慢得多，燃燒产物早在火焰推进得以增加速度之前就冷了。燃燒产物的冷却降低了运动气体的速度，并降低了火焰的推进速度。所以，很自然地，气体作層流运动时，爆震不会發生[①]。

---

① 关于燃燒轉变成爆震的問題，还可以参看下列爭辯文章：澤尔道維奇著："評索柯利克的'論爆震前的火焰加速机構'一文"，文載实驗物理及理論物理杂志，21，1172，1951；索柯利克著："論爆震前的火焰加速机構"，还有索柯利克答澤尔道維奇的評論，文載实驗物理及理論物理杂志，21，1164，1176，1951。

第四章　濃集爆炸物的爆震

§19. 濃集爆炸物爆震的通性

关于濃集爆炸物(俄文縮写作 BB)的爆震，無論在理論研究上或是实驗研究上都比气体的爆震理論落后得多。这落后，部分地是由于問題难得多的緣故。濃集爆炸物爆震时，产生出爆炸产物(俄文縮写为 IIB)，其压强达几十万大气压，其密度达2克/厘米^3。这就形成了介質的一种完全新的特殊狀况。

气体爆震的許多問題，現在証实了有可能很准确地算出爆震速度来。所以，有关反应完畢的运动、压强和温度的热力学部分，可以認为已經完全解决了。最感兴趣的也是应該加倍努力解决的是爆震波中进行反应的机構和反应速度的問題。从安全技术(有許多場合不允許爆震發生)的要求看来，最要紧的問題是气体爆震的極限問題，这个問題也与化学反应的进行条件有关系。

固体爆炸物和液体爆炸物进行爆震时，其計算中的热力学問題已經是極复杂的了，只在最近，蘭道和斯坦紐柯維奇發表了关于这些問題的文章之后，才有一些重要結果。但即使这些文章还不能根据自变的数据去算出爆震速度来，只能利用量得的爆震速度去算出高压下爆震产物的狀况来。

因为知道了爆炸产物的狀况方程，所以才可以解决一系列有关爆震时及爆震以后爆炸产物的运动問題。这些問題的解决逐漸导致对爆炸物的机械破坏作用作理論的計算。关于爆炸产物的作用放在最后一章里講。

由于直接对高压下的介質做实驗研究很困难，目前关于爆炸

物的性能只好丢掉：第一，一般的，密度、發热量、爆炸产物的成分（这些对爆震本性都不是特殊的东西），第二，爆震速度，还有像测爆炸时爆炸产物的最大速度、总冲量（压力对时間的积分），它是代表爆炸产物平均飞散速度的。

研究得最少的問題，是濃集爆炸物的化学变化和爆震極限。这，一方面是由于問題的極端复杂性，由于現在还不能在实驗室条件之下不用爆震而复制在波中所进行的反应狀况；在爆震中反应的时間只占几百万分之一秒，对于这样的反应过程很难进行实驗的研究。另一方面，技术是在很大的程度上沿着創制并利用最强有力的爆炸物这条路綫走的，而这种爆炸物在爆震波里是極容易生反应，反应極快的。

进行爆震时，这种爆炸物的化学反应区，即未扰动爆炸物与爆炸产物之間的分隔地帶，是極薄的一層，就在这極薄的一層里，化学反应已經完成了。每一瞬間在进行着化学反应的物質仅占全部爆炸物的極微小一部分。如果說反应的机構只是使相切的条件得以滿足，那末，爆震速度、爆炸产物的运动速度和爆炸产物的压强便与化学反应的速率沒有关系。

所以，爆炸的任何一种实际重要作用都与它的化学反应速率無关，只要反应速度够高，以致反应区的尺寸同爆炸物的整个尺寸比起来很窄小。

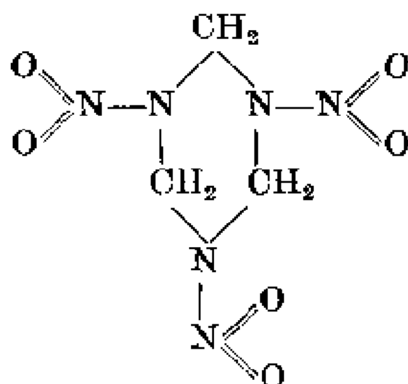
反应速率再增高，反应区再縮小，对于爆炸的一切外部現象都沒有关系了，虽說爆炸在本質上归根結底不过是一种極迅速的化学反应而已。

这就使爆炸問題在化学反应方面的研究与該問題在热力学及气体动力学方面的研究比起来，显得不那末重要，实际意义就較低了。

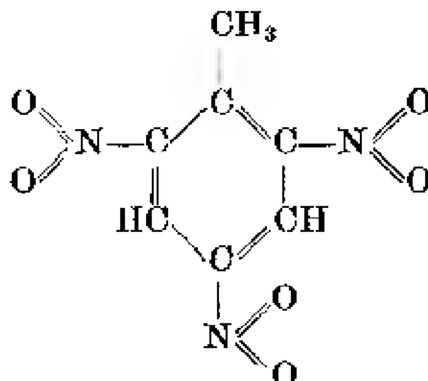
我們这里在从量的方面来講这些問題之前，先把爆炸物的一

般特性、爆炸物的研究方法及使用方法、反应机構、極限爆震以及产生爆震的条件作一个極概略的叙述。当然，这一点材料并不能替代專研究爆炸物应用的那些讀者所应讀的爆炸物理論的詳細教程。

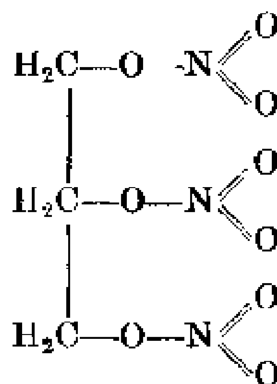
用得最多的爆炸物是硝基化合物和硝酸酯。作为例子，在硝基化合物中首先要提到的是环三次甲基三硝胺（黑索金，賽克罗托特，T_4），这种爆炸物的熔点是 202°C，密度是 1.82：



还有三硝基甲苯（TNT），这是一种固体爆炸物，熔点是 80°，密度是 1.66：



硝酸酯的例子是硝化甘油，这是彈藥和炸藥的原料。这种液体在室温下的密度是 1.60：



这些爆炸物在一个分子里既含有燃料(碳和氫)又含有氧，且氧是和氮結合在一起的。氧与氮化合的反应能量接近于零，而氧与碳或氫化合成 CO, CO_2 或 H_2O 則放出大量的能来。氧从氮轉到碳和氫里去，就是爆炸的能量来源。

爆炸产物的成分，即反应的主要产物，計有 N_2, H_2O, CO_2, CO, H_2 几种东西。如果氧有富裕的話(硝化甘油的情形)，爆炸产物中会有一些自由的氧分子，那时 CO 和 H_2 就簡直不存在；氧很不足的話(三硝基甲苯的情形)，爆炸产物中会出現自由的碳分子，自由碳分子成为黑烟，CO 和 H_2 增多，同时 CO_2 和 H_2O 減少。

黑索金的發热量是 1360 大卡/克，硝化甘油的發热量是 1550 大卡/克；按發热量来說，这兩种东西接近于空气混合气的發热量，然而低于氧混合气的發热量。

由于濃集爆炸物的密度很大，所以就單位体积所含的能量来說，濃集爆炸物約为一大气压下混合气能量的一千倍。

爆炸时所形成的爆炸产物的体积，合到标准条件(0°C，一大气压)的体积来說，每一克約为一升，即約为爆炸物原来体积的一千倍。如果爆炸物中的氧不足，那末爆炸产物中会含有可燃气体，这些可燃气体会与空气中的氧化合而释放相当多的能量；这就可能增强爆炸的空气波，虽然对于爆炸产物的压强并沒有影响，对近距离的作用也沒有影响。

除了一个分子里同时包含有氧和燃料的这种單一化合物之外，还有用各种溶液和机械混合物的。兩种物質的混合物，尽管單独时哪一种也沒有爆炸性，可是混合在一起就可能成为很强烈的爆炸物。我們这里只談唯一的一种液氧炸藥，它是用燃料(木炭、烟炱，泥炭)浸在液体氧里而成的东西。

机械混合物的爆震，从原理的观点看来是很重要的，因为机械混合物的反应不可能在瞬間进行。如果說組成混合物的兩种物質

的分子在边界处有接触，可以在瞬間反应，那末位于内部深处的分子要反应还是需要一定时間的。这样，我們在机械混合物这个例子上就可以确信，瞬間进行反应并不是爆震可能性的必要条件。所以，單一的化合物要进行爆震，也不必从爆震波的推进去得出結論来說反应必在瞬間进行。

除了靠氧与碳，氧与氫化合以释放能量的爆炸物之外，还有靠完全不同类型的化合以释放能量的爆炸物。这种例子有叠氮化鉛 $Pb(N_3)_2$，雷汞 $Hg(CNO)_2$。这兩种爆炸物每單位質量所能释放的能量[1]都小得多，却極易爆炸且昂貴。这兩种爆炸物的价値在于用来引發爆震。

大多数的爆炸物，所謂二次爆炸物（通用的名詞还有：爆破炸藥或烈性炸藥），是可以用各种方法使它發生分解的：把它長时間放在高溫下，它可以进行緩慢的分解，把它加热到更高的溫度时，它可以进行爆發——迅速分解。这种爆炸物給它局部燃点时，它可以进行相当慢的燃燒，燃燒速度在 0.01 至 0.1 厘米/秒之間。通常二次爆炸物的爆震是用一次爆炸物或引藥来引發的，把一次爆炸物同二次爆炸物靠在一起，以引發后者。

同时，只有在一次爆炸物能产生足够强大的震波的时候，二次爆炸物才能被引發出爆震来。例如在密度很低的三硝基甲苯里造成一个爆震波，这个爆震波就不会进入鑄成的三硝基甲苯里去。甚至用速度为每秒几百米的子彈打在三硝基甲苯上，都不能使它进行爆震。

引發爆炸物（以叠氮化鉛为典型代表）与这些爆炸物不同，它在普通的条件下不会进行緩慢燃燒，只要一燒，立刻就轉变成爆震。所以通常全套的爆炸裝置包括一段細金屬綫，綫上盖以烟火

[1] 由于这兩种爆炸物的原来密度都很大，叠氮化鉛达4.71克/厘米³，雷汞达4.42克/厘米³，所以單位体积的能量以及所能达到的最大压强反而高于有机的爆炸物。

剂，和少量引發藥，主要的炸藥是二次爆炸物。細金屬綫通电燃着烟火剂，产生火光，即产生了燃燒气流的流动。这些燃燒气流便使引藥發生爆震，引藥的爆震再引發主炸藥爆震。能通电流的細綫、烟火剂、和引發藥合起来組成所謂“爆震引子”(俄文縮写是 КД)，这种引子通常成圓柱形，直徑 6—8 毫米，長 40—50 毫米。一个引子可以引發任何数量的炸藥。沒有引子，二次爆炸物是相当安全的。

二次爆炸物照例是易揮發的物質。作緩慢燃燒时，它先变成蒸汽，然后才燃燒。别列雅也夫(А. Ф. Беляев)首先指出，这就使这种爆炸物很难由燃燒轉变成爆震。

别列雅也夫指出[1]：用容电器燃点浸在敞口小玻杯中硝化甘油内的鉄絲，只能使硝化甘油飞散，既不能引起它爆震，也不能使它燃燒起来。

如果把硝化甘油放在密封的一个容器里，不讓它蒸發，則电綫的燃点就会引起爆震。一般說来，用易揮發的二次爆炸物做实驗时，要它爆震就須同时有热力作用和压力作用才行。热力作用使引藥很快地进行分解，結果压强得以提高，因而产生了爆震波。

爆炸物發生爆震的能力与使用它的条件有关系。長圓柱形的爆炸物只有当它的直徑超过某个定値(所謂炸藥的临界直徑)时，爆震才能無限制地沿柱長进行；直徑小于此値时，爆震是要中止的。例如，細玻璃管中的硝化甘油，罗辛(В. Розинг)和哈理东(Ю. Б. Харитон)[2]曾求得它的临界直徑約是 2 毫米。

据此，他們提出了关于临界直徑与爆震波中化学反应时間二

(1) 别列雅也夫著：“在热力冲击作用之下爆炸物發生爆震”，苏联科学院报告，18, 267, 1938。

(2) 罗辛和哈里东合著：“小直徑炸藥的爆震中止問題”，苏联科学院报告，26, 360, 1939。

者之間关系的这样一个很重要的看法，炸藥的直徑对于爆震推进的影响是由于，成柱狀的炸藥受到压力时，它不仅沿爆震方向前后膨脹（即沿柱軸方向膨脹），而且在半徑方向也有膨脹。直徑愈大，半徑方向的膨脹作用愈小。

向前去的膨脹把原来未扰动的爆炸物又压縮了一層，因此，这方向的膨脹不能当作損失看，而是爆震过程的一个正常部分。爆震波对爆炸物而言向前走得愈快，則爆炸产物向后的膨脹愈慢，也就是說，波后的爆炸产物的压縮層愈厚，則向后的膨脹愈慢。所以，炸藥的直徑很大的时候，产生引發波的引藥愈有力，爆震最初推进的損失愈小；随着波發展下去，向后膨脹的損失减小。

如果炸藥的直徑很小（圖 50），那末半徑方向的膨脹便与波的推进無关了。显然，在爆震速度等于当地音速处（切点）之后，爆炸产物的膨脹就不可能对爆震的推进有什么影响了：爆炸产物区内的任何扰动都不能赶上爆震波。但在爆震波头上一定有反应区存在，在反应区中 $D<c+w$，同时介質已經在高压作用之下，因而在半徑方向进行膨脹。这个区里的膨脹是損失；这可以从各守恒方程上得到証明，只要計及反应完畢之后气流的截面积較爆炸物原有的截面积为大就行了。截面积的增大，即半徑方向的膨脹，必使压强下降，并使爆震速度較等截面积时为低。

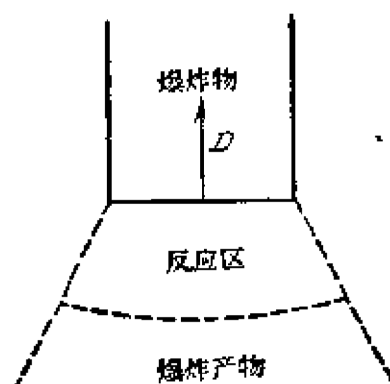


圖 50.

爆震波推进速度的下降反过来又使震波的强度减弱，使进行反应的条件变坏。

只有当半徑方向膨脹損失相当小的时候，爆震才有可能进行下去。

在討論气体爆震时，我們曾假定裝混合气的管子很堅固，不会变形。那时損失是从摩擦和散热上来的，因而損失的式子里包含有数值微小的管阻力系数，它說明管子里横向的流动是極小的，这种横向的运动只是由于紊流的不規則运动而造成，这种流动的动量和能量同縱向气流的比起来都是極微小的。因此占一个管直徑那样長度的反应区使爆震速度下降得很有限，約为 2—3%。

爆炸物在半徑方向飞散的速度与主向运动速度同一数量級；应該料到，反应区寬到等于炸藥一个直徑时，必使速度作極大的改变，並且使爆震終止。

哈理东[1]对爆震推进提出了一个極簡單明了的条件：压縮过的爆炸物的化学反应时間应小于它在半徑方向的飞散时間。飞散时間与 $\frac{d}{c}$ 同一数量級，式中的 d 是爆炸物的直徑，c 是速度，所以爆震的可能条件是

$$\frac{d}{c}>\tau.$$

而临界直徑便是 $d_{临界}=c\tau.$

这个公式是不能在量的方面作严格要求的。公式里可以加入無因次的因子，这些因子是决定于反应热量的，它可以同 1 相差很多。然而哈理东的这个估計价值还是十分高的，因为这就說明，在原則上任何一种物質只要能作放热化学反应的就能进行爆震。不同物質在爆震波内的反应时間 τ 不相同；τ 愈大，炸藥所需要的直徑愈大。如果是一种相当不活躍的物質，卽化学反应时释放很少热量的物質，这种物質里的爆震速度就極低，因而震波头上的溫度也很低。这就使化学反应速率極低，也就使 τ 增大，相应地，化学反应区便延長了。因而临界直徑 $d_{临界}$ 就得極大（根据活躍热能估計，如果反应热量極小的話，算出来的临界直徑可达天文数字）。

---

[1] 見前兩頁脚注。

在原則上，凡是进行放热反应的物質都能成为爆炸物，只要把它做成直徑够大的柱狀炸藥，并用很大尺寸的引藥以产生足够强大的波。

哈理东在苏联科学院化学物理研究所最近的实驗工作里把上述的关系加以發展了，并用到許多物系上去①。关于半徑方向的膨脹(即所謂飞散)是爆震中止的主要原因这一基本想法，已直接用实驗証明了；做炸藥外壳的影响实驗时發現，如果用外壳包圍炸藥的話，炸藥的临界直徑就可以减小些②。显然，这就因为外壳阻碍了、延緩了飞散的緣故。密度很大的炸藥在爆震波中产生的压强达 3×10^5 千克/厘米^2。这时外壳的慣性和可压縮性起主要的作用，抗炸的强度是不起作用的。慣性决定于密度及厚度。炸藥密度很低的話，外壳的强度也可以起作用。

爆震波中的反应机構到底是什么样的呢？

連續的爆炸物質，例如鑄成的三硝基甲苯(ТНТ)，或是像硝化甘油那样的液体爆炸物，可以設想它的反应机構同气体爆震中的反应机構一样。爆震波头是震波，这道震波压縮爆炸物；压縮的結果引起爆炸物的迅速反应，变成爆炸产物。如果是气体，震波的速度給定之后(等于爆震速度)，就不难算出震波的溫度和压强来。

如果震波压縮爆炸物时，其压强超过爆震的压强，即大于 $3\times$ $\times10^5$ 千克/厘米^2，这样的計算就沒有可靠的算法了，因为关于爆炸物的狀况方程还一無所知。除了溫度与反应速率有关系之外，压强也可能直接有影响，因为 pv 的数值与热能同一数量级。在气体，压强只决定分子碰撞的数目多少，至于碰撞的特征或性質则只决定于溫度，而与压强無关。

① 别列雅也夫与别列雅也娃(А. Е. Беляева)合著："論爆炸物的極限密度与炸藥直徑之間的关系"，文献苏联科学院报告，50，205，1945。

② 保貝列夫著："論化学上單一的爆炸物的炸藥極限直徑"，文献苏联科学院报告，57，789，1947。

在濃集爆炸物的情形，压强直接影响到分子之間的距离，它会改变化学反应的速率。列雅宾宁(Ю. Н. Рябинин)用实驗証明过[1]，有許多場合，高压(达 5×10^4 千克/厘米^2)下爆炸物的分解反应速率降低；压强这样的反面影响，原因在于在这些場合下进行反应的分子应先經过非寻常的大体积狀况，而高压阻碍了它的变化。

目前，要發展爆炸物的理論，必須直接研究为震波所压縮过的爆炸物中的化学反应；为此就必須挑选能进行反应而不爆炸的物質，例如用冲淡得很厉害的爆炸物，以便有可能去决定，在給定的震波作用下有百分之几起了变化。

極重要而有趣的是粉末狀二次爆炸物的爆震問題，这里面包括黑索金、泰安、特屈兒、三硝基甲苯、苦味酸等物，其密度 ρ 小于連續固体狀态时的密度 ρ_0。密度很小的炸藥($\rho<0.5$—$0.6\rho_0$)的制造法是把粉末小心地鋪洒在模型中；密度較大的炸藥(0.5—$0.6\rho_0<$ $<\rho<0.97$—$0.98\rho_0$)是用粉末压制而成的。

爆炸物的單独粒子是不可能进行爆震的，因为它比連續固体狀态的爆炸物的临界直徑小得太多了。因此，在整个炸藥进行爆震时，其中的一些粒子以某种形式在帮助另外一些粒子，使之在爆震波中迅速發生反应，并完成反应。还应該指出：如果爆炸物成粒狀，每粒的尺寸又大于临界直徑的話，那末进行爆震时并不一定是一粒一粒进行下去的，因为反应时各粒子之間有相互的作用。

阿宾(А. Я. Апин)有好几篇文章[2]从爆發性燃燒(顆粒燃燒)的机構上去詳細研究粉末狀物質的爆震概念。热气流(爆炸产物)

① 列雅宾宁著："压强对热分解速率的影响"，文載苏联科学院报告，58，245，1947。

② 阿宾著："論特屈兒的爆炸分解机構"，文載苏联科学院报告，24，922，1939；阿宾著："論爆炸物的爆震及爆發性的燃燒"文載苏联科学院报告，50，285，1945；阿宾与保貝列夫合著："論粉末狀爆炸物中爆震中止的性質"，文載苏联科学院报告，58，241，1947；阿宾与保貝列夫合著："爆炸物的物理結構和物态对爆震的影响"，文載物理化学杂志，20，1367，1946。

充滿了爆炸物粒子之間的空隙，它就把粒子燃点着了。每个粒子燃燒时，必在爆炸产物的包圍之中，而且燃燒速率是与包圍气体的压强有一定对应关系的。所以个别粒子的化学反应时間 τ 値是这样一个数量級 $\tau\sim\frac{\delta}{u}$，式中的 δ 是粒子的尺寸，u 是在爆震时那种压强之下的燃燒的平均速率。

爆發性燃燒理論不应該同爆震的流体动力学理論对立起来。恰恰相反，我們可以証明，粒子的位置若是乱布的，气体难以滲入孔隙的話，那末用爆發性燃燒理論研究气体的运动、爆炸产物的燃燒和运动之后，必然导致在爆炸产物中应滿足相切的条件。因此，爆發性燃燒的机構所实現的正是正常的經典理論的爆震速度 $D_{最小}$，这个速度只决定于爆炸产物的狀况方程和爆炸产物的初始狀况。

这种看法是为已經确知的实驗事实所間接証明了的：粉末狀爆炸物的爆震速度能随炸藥的裝填密度作連續变化，或說随压制的密度作連續变化；炸藥的尺寸相当大之后，个别粒子的尺寸已經沒有关系。根据粉末爆炸物 D 与 ρ 这样的关系，可以确立爆炸产物的狀况方程。所以，如果說作爆發性燃燒时，爆震速度等于滲入粉末的气流速度，那是不正确的。事实上，按爆發性燃燒的机構进行爆震时，爆震速度是决定于狀况方程的，也就是决定于依流体动力学理論算出来的爆炸产物的压强，这时气流的速度則自然等于爆震速度。

像叠氮化鉛之类的粉末爆炸物，它的極限直徑極微小，并可能成立这样的条件，使每一粒單独的粉末都可以进行爆震。这时粉末上推进的爆震波是在一个个晶粒上推进并从一个晶粒傳到另一个晶粒上去的一些爆震波的总和。

粉末狀炸藥的爆震速度等于固体連續狀炸藥的爆震速度除以粒子間平均距离(按直綫計算)。同时，爆震速度 D 与爆炸产物的

压强無关，而且只要 $D>D_{最小}$ 的話，爆震速度 D 与按經典理論計算出来的 $D_{最小}$ 也無关。

实际上，在叠氮化鉛的 $D(\rho_0)$ 曲綫(圖 51)上可以看到有一个駝背，在那个区里，$D>D(\rho_0)_{最小}$，也显然，有压縮不足的爆震波存在。爆震速度决定于由一个晶粒轉到另一晶粒去的燃燒轉变速度，而在这个意义上說来，就像强迫燃点似的；如果取波前各粒子的平均值和反应完畢时的平均值作平衡計算的話，那末这些平均值是滿足圖 19a′点那样的狀况关系的。

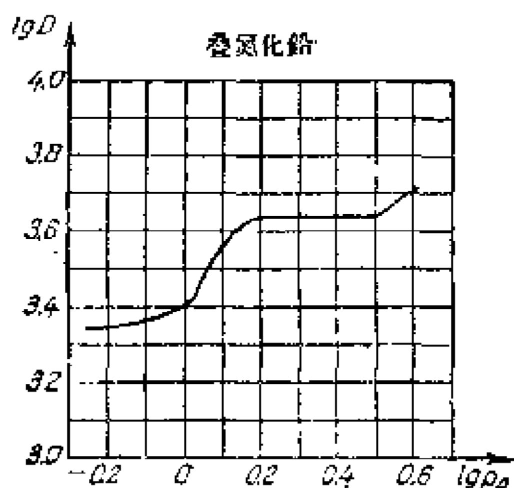


圖 51.

所以，爆震不按爆發性燃燒机構进行的話，流体动力学理論(这里包括切点的条件这个概念在內)就不成立了，而做爆發性燃燒时，流体动力学理論是成立的。

由爆發性燃燒的理論推知，反应区的厚度是决定于粒子尺寸的。哈理东的看法是把反应厚度、反应时間和炸藥的临界直徑連系起来的，实驗証实了这种看法：增大粒子的尺寸，炸藥的临界直徑就随之增大。

阿宾在后来的文章里企圖將爆發性燃燒的理論推广到适用于連續狀爆炸物(鑄成的爆炸物或是液体爆炸物)，給这种爆炸物补充一种气流机構[1]。按阿宾的說法，爆炸产物成为一股股的气流，这种气流会直接冲进濃集爆炸物里去，并冲开前面的一層气体。

目前还沒有实驗数据能証明确实有这种机構存在，还不能确定什么条件实現經典机構，什么时候实現气流机構(这个名詞是阿宾提出来的)。这个概念应由实驗来判断它是否可以存在。

[1] 阿宾著"論爆炸物的爆震及爆發性的燃燒"，苏联科学院报告，50，285，1945。

許多种爆炸物有兩种爆震速度是很奇怪的，这种現象还沒有得到解釋；除了 $D\sim7$—8 千米/秒的速度之外，通常在細管中或是在一屑層爆炸物中所观察到的定型爆震推进速度为 0.3—0.7 千米/秒，1—1.5 千米/秒，2—2.5 千米/秒。毫無疑問，普通的速度 7—8 千米/秒是相当于流体动力学理論的爆震，而較低的接近于極限値的速度則是由于有了某种損失的結果。但关于这些損失的性質（飞散、反应不完全）是不清楚的，为什么这样的速度是稳定的（現在我們有办法判断它的稳定程度）也不明白。有趣的是，已經有一道低速爆震扫过之后，在同一塊炸藥上还可以有第二道低速爆震波向反方向推进，或是在同一塊炸藥上有兩个低速的爆震波（速度値不相同）在推进。低速的实用价値是沒有的，但在研究極限爆震时，这种現象是要討及的[①]。

濃集爆炸物（硝基化合物类）的爆震速度是 7—8 千米/秒，比气体的爆震速度大几倍。此外，爆震速度与爆炸物的密度大有关系，或說与裝塡密度大有关系。我們知道气体的爆震速度是

$$D=\sqrt{2Q(k^2-1)},$$

它只决定于反应热量和反应产物的分子常数。的确，实驗証明，气体的 D 几乎是与混合气的初始压强無关的。

濃集爆炸物（硝基化合物类）进行爆震时，波头上爆炸产物的密度是 1—2 克/厘米^3。在这样大的密度下，爆炸产物每一分子所占的容积就完全与分子的实有体积可并比了。显然，密度这样大

① 关于低速爆震的更多資料可参看下列几篇文章：阿宾与保貝列夫合著："論粉末狀爆炸物中爆震波的中止特征"，文載苏联科学院报告，58,241,1947；拉特涅尔（С.Б. Ратнер）著："硝酸甲酯中爆震速度的量测結果"，文載苏联科学院报告，42, 276, 1944；拉特涅尔与哈里东合著："論硝化甘油和乙二醇二硝酸酯的爆震速度"，文載苏联科学院报告，41, 307; 1943；维恩斯（Vines）与默尔卡希（Mulcahy）合著："硝化甘油中爆炸的初始阶段。爆震波在硝化甘油薄層中的推进"，文載 Proc. Roy. Soc. 191, 210 与 226, 1947；庫尔班加利娜（Р. Х. Курбангалина）著："过氧化氢与甲醇的混合物和高氯酸与乙醇的混合物中稳定爆震的極限直徑"，文載物理化学杂志，22, 49, 1948。

的物質已經不能算作气体了。

首批研究濃集爆炸物爆震問題的研究者(例如儒格,陶特黎什 Дотриш, 什米特 Шмидт)都用众所周知的范德瓦耳斯实际气体方程計算分子的实在体积。这时得从物質所占的全部体积里减去分子的实有体积 b, 然后按下式計算压强

$$p=\frac{RT}{v-b}. \tag{19.1}$$

范德瓦耳斯的內聚力$\frac{a}{v^2}$一般說来是可以不計的，因为爆震产物的溫度極高，$\frac{a}{v^2}$項的相对值極微小。

炸藥的裝填密度在 0.5 克/厘米^{3}左右时,狀况方程(19.1)是很符合实驗数据的。但这里要指出,在这样的密度下,D与炸藥裝填密度之間的关系已經很小。而当密度大到爆震速度开始与初始密度大有关系时,(19.1)方程，假定把給定物質的分子实有体积当作常数看的話,便和实驗相差很远了。換句話說,不可以把炸藥看作是由"剛体的"不可压縮且不会变形的分子所組成的东西，这些分子的一切能量和全部压强都是热力的本源。确实，方程(19.1)所代表的物質能量是与理想气体的能量沒有什么区别的。

因此,为了多少接近些实驗,就得把分子的实有体积当成变数看,認为它是隨物質所占的容积而变的。这也就是說,不能像气体分子运动理論那样,把分子当作"剛性粒子"看。

蘭道和斯坦紐柯維奇① 首先拿濃集爆炸物的爆震产物同固体物的晶体柵狀結構相非比。大家都知道固体物的能量有兩个来源:一是彈性能,这是由原子与原子間、分子与分子間的相互作用力而来的能量,另一是由原子或分子繞其平衡位置作振动的热能。

固体即使在絕对零度下还是具有彈性能的。大家都知道，在

① 蘭道与斯坦紐柯維奇合著:"論濃集爆炸物的爆震研究法",苏联科学院报告, 46, 399, 1945。

絕对零度下物体的熵等于零，任何的狀况变化都与机械功有关。因此，如果只計算彈性能的話，那末物体的狀况方程便可以写为这样的形式：$p=p(\rho), E=\int_{\rho_0}^{\rho} p\frac{d\rho}{\rho^2}$，这样写法是略去了物体热振动的能量的。溫度相当高之后，热振动的能量便与絕对溫度 T 成正比(例如，符合杜隆、珀替定律的話，$E_{热}\sim 6T$ 大卡/模尔)。蘭道和斯坦紐柯維奇指出，可以把彈性能和压强的彈性部分当成主要的部分看，来研究濃集爆炸物的性态。

我們按蘭道和斯坦紐柯維奇那样，認为当濃集爆炸物的爆炸产物密度超过 1 克/厘米^3 时，压强的主要部分是彈性压强，这种压强只决定于爆炸产物的密度，与溫度沒有关系。我們要弄清楚，在这个假設之下，怎样可以得到爆炸产物的压强 p 与密度 ρ 的关系，已知爆震速度 D 与爆炸物初始密度 ρ_0 之間的实驗关系数据。

显然，这时就不能用

$$D^2=2Q(k^2-1)$$

这个公式了，因为这个公式是在这样一个假定之下推导出来的：爆炸产物的压强只决定于它的溫度(热力压强)，所以只适用于密度很小的气体；这个公式的推导基础是把能量方程当作計算溫度用的方程看的。

如果压强的主要部分是彈性压强，那末溫度的計算因而能量方程的利用便都是多余的了。

現在我們使用質量守恒和动量守恒定律。

大家都知道，由这两个方程可以得爆震速度的公式如下：

$$D^2=v_0^2\frac{p-p_0}{v_0-v},$$

式中的 p_0, v_0 是爆炸物的初始压强和比容，而 p 和 v 是爆炸产物的压强和密度。在濃集爆炸物的情形，显然 p_0 可以略去。用密度

代公式里的比容，然后把它变成压强的公式：

$$p(\rho)=D^2\frac{\rho_0(\rho-\rho_0)}{\rho}. \tag{19.2}$$

这个公式里的爆震速度 D 是已知的，从实驗可以得到 D 随爆炸物初始密度变化的函数关系，$D=D(\rho)$。爆炸物的密度在 $\rho_0=$ $=1$ 至 $\rho_0=1.6$—1.7 这个范圍内变化时，可以近似地認为 D 与 ρ_0 成正比，即 $D=A\rho_0$。許多重要爆炸物的常数 A 約为 4.5×10^5 厘米/克·秒，这相当于当 $\rho_0=1$ 克/厘米^3 时爆震速度为 4.5 千米/秒，当 $\rho_0=1.6$ 克/厘米^3 时爆震速度为 7.2 千米/秒，这些数值和三硝基甲苯、黑索金和硝化甘油等物的实驗数据差不多。

公式里除了所要求的压强 p 之外，还有一个未知的数值，即爆炸产物的密度 ρ。

作一个最簡單的假設，設 ρ 与 ρ_0 成正比，即

$$\rho=h\rho_0,$$

这个系数 h 大于一，因为在爆震波里物質是被压縮了的。下面我們將証实关于常数 h 的这个假設是对的，并把 h 的值求出来。

把 D 与 ρ 的关系式都代到公式(19.2)里去，得

$$p(\rho)=p(h\rho_0)=A^2\frac{h-1}{h}\rho_0^3=A^2\frac{h-1}{h^4}(h\rho_0)^3=A^2\frac{h-1}{h^4}\rho^3. \tag{19.3}$$

或作
$$p=B\rho^3, \tag{19.4}$$

式中的
$$B=A^2\frac{h-1}{h^4}. \tag{19.5}$$

这样，根据爆震速度与爆炸物密度成正比的实驗事实，就得到爆炸产物的压强应与爆炸产物密度的三次方成正比的結論[1]。

---

[1] 这样的結果也可以从因次的推理上去求得：压强的因次是 ρ_0D^2，这是因为 $D\sim\rho_0$, $p\sim\rho_0^3$ 的緣故；如果 $p=p(\rho)$，那末由因次关系得知，应該 $p\sim\rho^3$。照說，从实驗只能得到比例常数 A，A 的因次上面已經說过了。这样，按压强的因次說来，用 A 和 ρ 来表示压强时其唯一的形式必是 $A^2\rho^3$。

常数 h 我們根据这样一个条件去决定：在实驗中存在有最低的可能爆震速度①。

給了定律 $p=B\rho^3$，爆震速度就可写为

$$D^2=\frac{p\rho}{\rho_0(\rho-\rho_0)}=B\frac{\rho^4}{\rho_0(\rho-\rho_0)}. \tag{19.6}$$

可以求出在給定的 B 和 ρ_0 值之下使 D 为最小值的 ρ 值来。

为此，这样算一下：

$$\frac{d(D^2)}{d\rho}=\frac{B}{\rho_0(\rho-\rho_0)^2}[4\rho^3(\rho-\rho_0)^2-\rho^4]=\frac{B\rho^3(3\rho-4\rho_0)}{\rho_0(\rho-\rho_0)^2}=0, \tag{19.7}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}&\rho=\frac{4}{3}\rho_0, \quad h=\frac{4}{3},\\ &p(\rho)=\frac{1}{4}\rho_0D^2, \quad w=D\frac{\rho-\rho_0}{\rho}=\frac{1}{4}D.\end{aligned}\right\} \tag{19.8}$$

这样，典型的爆炸物进行爆震时，初始密度是 1.6 克/厘米³的話，爆震速度是 7.2 千米/秒，爆震波头上爆炸产物的密度等于2.13 克/厘米³，压强是 2×10^5 千克/厘米²，运动速度是 1.8 千米/秒；爆炸产物的狀况方程是 $p=2\times10^4\times\rho^3$，式中 p 的單位取为千克/厘米²，ρ 的單位取为克/厘米³。

当然，所有这些数値都应該当作近似値看。所引的这些数値却比什米特的計算結果接近实际得多，什米特对狀况方程作了錯誤的假設，以致 p 和 w 大为降低(低成一半了！)。

在 §20 里要把这个問題更詳細地研究一下，要按蘭道-斯坦紐柯維奇的文章那样把热力的压强也考慮在內。

一方面要在給定的彈性压强定律下，依据統計力学理論研究很密的介質中的热力压强。

---

① 在講气体的爆震时曾指出过，在給定的雨貢紐絕热方程下(即給定狀况方程的彈性压强)，最低爆震速度的条件是与 $D=w+c$ 这个等式的条件相適合的，也就是說，爆震速度与波头之后的扰动推进速度是相等的。

另一方面要根据爆震速度对爆炸物（化学成分很接近的各种爆炸物）的爆炸热量（發热量）关系的实驗数据去闡明热力压强的作用。

这样計算是相当复杂的，結果却同近似定律 $p=2\times10^4\rho^3$ 并沒有很大的决定性的出入。

关于爆炸产物的运动計算，利用这个最簡單的定律已經够了，只要注意到：(a) 在实际上，压强中有一部分（約为⅓）不是彈性压强，而是热力压强，(б) $p=B\rho^3$ 这个定律只在密度 ρ 大于 1—1.3 克/厘米^3 时才能应用[1]。

本节的結論已經足够去了解 § 21 关于爆炸产物的运动了。下一节主要可供特别有志于研究高压下物質的狀况方程的人作参考用。

§ 20. 爆炸产物狀况方程的精确算法

关于濃集爆炸物的爆震理論，可以毫無矛盾地給它一个前提假定：压强全是彈性压强，热力部分則只具有能量。在这样的極限情况下，方程(20.14)中的常数 ζ 可以設为 ∞（参看后面），那就很容易导出一个較严格的理論来。按估計，当热力的压强对彈性压强之比等于 1 时，热力的能量約为彈性能量的 6 倍。这就有理由作第一个最粗略的假定：

$$p=p(\rho),\quad E=E_0(\rho)+\rho f(T).$$

切綫的条件是適用于任何一种爆炸物的，只要分解的反应进行到底，并且膨脹波赶不上爆震波就行了[2]；这个切綫条件可以写为

---

[1] 斯坦紐柯維奇在蘭道和他合写的文章發表之后，又在"苏联科学院报告"上發表了一系列的文章，在这些文章里他都使用了 $p=B\rho^3$ 这个定律。

[2] 参看 § 9。

$$\frac{p}{v_0-v}=-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S=-\frac{dp}{dv}.$$

按这个方程，可以把爆震波中的介質比容 v 表为初始比容 v_0 的單值函数。

例如設有多变方程存在:

$$p=B\rho^n.$$

那末

$$\frac{D^2}{v_0^2}=\frac{p}{v_0-v}=\frac{nB}{v^{n+1}}=\frac{np}{v}. \tag{20.1}$$

由此，普通說来 $v=\frac{n}{n+1}v_0$ 相当于气体爆震問題中的 $v=\frac{k}{k+1}v_0$，但这里与气体爆震不同的地方在于，按(20.1)方程还可以把爆震速度求出来，只要假定常数 B 是已知值。B 值如能作常数看，那末(20.1)便能确立 $D(\rho_0)$ 这个关系式

$$\frac{\partial \ln D}{\partial \ln \rho_0}\sim\frac{n-1}{2}.$$

$\frac{n-1}{2}$ 这个値，从实驗得知对于泰安、苦味酸等一类的爆炸物而言約是 0.8，所以 $n=2.6$。按計及热力压强的較精确理論算下来，$n=2.8$。

按(20.1)式，我們可以用泰安的已知 D 値，$D=8.4$ 千米/秒，求出爆震中的压强 p 来。炸藥的密度 $\rho_0=1.69$ 克/厘米^3 时，$p=\frac{\rho_0 D^2}{n+1}\sim 335\times10^3$ 大气压。这里提一句，初始密度为 10^{-3} 克/厘米^3 的混合气爆震时所达到的压强是几十个大气压。在 n 变化不大时，p 的式子变化不是那末敏感的，因此，往往就取 $n=3$，这样給实际計算提供很方便的气体动力学方程(参看 § 6)。

我們还看到，如果能适当地选擇溫度那部分能量的話，能量方程

$$E-E_0=Q+\frac{1}{2}p(v_0-v) \tag{20.2}$$

在这个理論中是会得到满足的。

現在我們来講更严格些的理論。首先我們看到，爆震速度与v_0的关系要用来求出爆炸产物的精确狀況方程，那它所包括的原始数据是不够的。这一事实只看切綫的条件中只包含一个偏导数$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S$，而另一些导数在爆震理論中通常都不存在，就知道了。然而，根据經驗的关系式$D(\rho_0)$以及关于爆震产物的某些簡單的物理假設，我們是可以建立一个狀况方程的，这个方程的参数的范圍是相当狭窄的。此外，那些表征爆震的数值(产物的压强、比容)則与这些参数很少有关。

前面已經說过，蘭道和斯坦紐柯維奇把反应剛完畢的爆震产物的狀况当作固体狀态看，其分子的密度达到了这样大的程度，以致每一压縮都得付出大量的彈性功(分子之間作用的彈性功)。在这个意义上，物体的彈性性态就可以当作結晶体的性态看了(这就与气体不同，气体的压强完全是分子的热运动)。

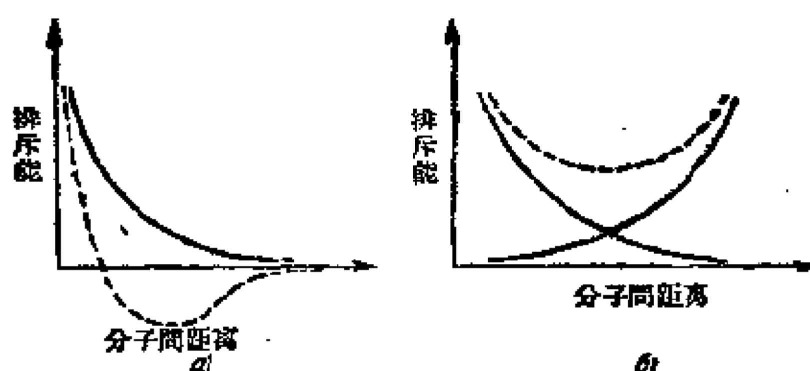


圖 52.

关于濃集爆炸物的分解机構，我們可以作这样的設想。爆炸前，硝基化合物的复杂分子中的原子取稳定度很低的平衡位置，这是由于化合力的原因。这些位置被我們画成圖 52, *a* 的虛綫。这些位置不仅像圖 52, *a* 上那样对应于一定的原子距离，而且严格地对应于一定的空間相互位置，这空間位置是与量子力的方向特性有关的。

爆炸时，原子改組成稳定的 CO, CO_2, H_2O, NO 等分子。分子之間的平均距离，也像濃集爆炸物中的情形一样，是被震波压縮过而縮短了的，这震波在爆震波头上是一定存在的。压縮使爆炸物大分子中的原子从稳定度很低的平衡位置解放出来，然后結合成另一些稳定度高得多的 CO, CO_2 等分子。但得到的是密度極大的物質(这里要指出，液态气体的密度不过是 1 克/厘米^3，而爆震波中的密度却大于 2)。因此，分子之間有很大的排斥力存在（参看圖 52, a 中的实綫）。把相鄰分子的排斥力曲綫疊加起来便得任意分子的稳定位置（圖 52, $б$ 的虛綫）。但这与圖 52, a 的平衡位置不同，这些平衡位置需要很大的外界压强。

分子在这种平衡位置附近的热力振动就成为热力部分的压强。这种振动同分子內部的原子振动合起来成为热力部分的能量。因为压縮的程度很大（爆震波中密度已大于原始爆炸物的密度 30%），所以对应的彈性力也很大。

彈性压强与密度的精确关系还不知道。最方便可以近似地表为这样一个指数形式的关系 $p=B\rho^n$。当然，这个关系不可以把应用范圍扩大及于爆炸以前爆炸物的初始狀况，因为那时 $p=0$, $v=$ $=v_0$。$p=B\rho^n$ 这个关系通常称为多变关系。

应該强調指出，这个指数关系的选取只是为了数学上的方便。这个关系是可能存在的，作为按 $F=\frac{a}{r^{3n-2}}$ 律而互相排斥的力的各中心之間的精确关系而存在，像在波恩(Борн)結晶柵格理論里所采用的那样，不过在爆炸产物里原子之間那样小的距离上，要談到分子之間的力的指数律未必有意义。

現在来算一算分子的热力运动。在爆震产物所达到的那样程度的压縮里，热力运动必是短距离振动。每一振动自由度具有一分能量 RT(每模尔)。总的振动能量等于 c_vT，这个 c_v 是比热，这比热在現在的近似看法之下，是与物体的比容無关的。

热力学告訴我們，能量中的热力部分不一定能按压强的热力部分去計算。大家都知道，能量对比容的导数与压强之間存在着这样一个关系：

$$p-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=-\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_T. \qquad (20.3)$$

設 p 里包含有 $T\varphi(v)$ 項。这一項完全从 (20.3) 式左側消去，并無論如何与能量中的可能項 c_vT 沒有关系。这兩項 ($T\varphi(v)$ 和 c_vT) 应分别独立計算。因此，为了要写出爆震产物的 p 和 E 的式子来，就得从自由能量 $F=E-TS$ 出發，就像在热力学中通常做的那样。教科書里关于固体物的自由能量是这样写的，它只包括各振动自由度的能量[1]：

$$F=E_0-c_vT\ln T+\sum_i RT\ln\omega_i, \qquad (20.4)$$

式中的 E_0 是絕对零度时物体的彈性能量，等于 $\frac{B}{(n-1)v^{n-1}}$，c_v 是定容比热，ω_i 是原子在栅格中第 i 次正常振动的頻率。

公式 (20.4) 应該在大的密度范圍里（这个范圍与爆炸物的初始密度有关，即与炸藥的裝填密度有关）采用。因此必須計及的固体物的振动自由度可以有兩种类型：一种是分子之間的距离無限远离之后就要变成自由运动或自由旋轉的，另一种即使到了分子無限远离时，仍保留为振动的。后一种振动，例如爆炸产物中的双原子的或三原子的分子（NO, CO, CO_2, H_2O）就具有。初步近似地可以假定这些振动的頻率根本与物質的密度無关，并認为頻率的对数平均值 $\bar{\omega}_2$（$\ln\bar{\omega}_2=\sum_{i_2}\frac{1}{N_2}\ln\omega_{i_2}$，$N_2$ 是这些振动的数目）为常数。

因为栅格的振动自由度总共等于 $3N$（式中的 N 是原子的总数），$\sum RT\ln\omega_i$ 便具有 $3N$ 項。每一振动自由度在自由能量里增

[1] 蘭道与利夫希茲合著"統計物理学"（第二版），苏联国立技术理論書籍出版社，莫斯科，1951。

添一项 $kT\ln T-kT\ln\omega$，这个式子里的 k 是玻尔兹曼常数，等于 1.39×10^{-16} 尔格/度，也就是气体常数为阿佛伽德罗数所除而得的商。

把总和 $\sum\limits_{i} RT\ln\omega_i$ 按它相应的频率属于哪种振动自由度而分为两部分：

$$\sum_{i} RT\ln\omega_i=\sum_{i_1} RT\ln\omega_{i_1}+\sum_{i_2} RT\ln\omega_{i_2},$$

式中的下标 1 和 2 是表示振动类型的；1 代表这样一种振动，当物質变成稀薄的气体狀态时，$\omega_{i_1}\to0$，即振动变成旋轉或平移运动，而 ω_{i_2} 則始終保持同一数量級的数値。

写为平均对数頻率可作：

$$\sum RT\ln\omega_i=c_{v_1}\ln\bar{\omega}_1+c_{v_2}\ln\bar{\omega}_2,$$

而且 $c_{v_1}+c_{v_2}=c_v=3R$，这是根据我們說过的总自由度的数目（$c_v=3R$）而来的。c_{v_1} 和 c_{v_2} 可以作为对应于振动的比热来計算。

只存在于濃集狀况的振动頻率 $\bar{\omega}_1$ 与密度的关系，可以这样去估計。在数量級上，这个頻率等于音速为原子之間的距离所除。这个关系就是簡單地从因次分析而来的。音速 $a=\sqrt{\dfrac{\partial p}{\partial\rho}}$ 或 $c\sim\rho^{\frac{n-1}{2}}$，这是因为 $p\sim\rho^n$ 的緣故。原子之間的距离与分子容积的立方根成正比，即与 $\rho^{-\frac{1}{3}}$ 成正比。因此我們所感兴趣的振动頻率 $\bar{\omega}_1$ 便是与 $\rho^{\frac{n}{2}-\frac{1}{6}}$ 成正比的[1]。

經这样分析之后，自由能量便可以写为下列的形式：

$$F=\frac{B}{(n-1)v^{n-1}}-c_vT\ln T-c_{v_1}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)T\ln v-T\times\text{const.}\quad(20.5)$$

---

① 这个关系也可以直接从分子之間的排斥力推出来。前面已經說过，多变指数 n 与波恩排斥力之間的关系是这样一个规律：$\frac{A}{r^{3n-2}}$。振动頻率的平方与圖 52,6 上虛綫所示平衡位置上的力的导数成正比，即与 $\frac{1}{r^{3n-1}}$ 成正比。但在平衡位置上的 r 是与 $\rho^{-\frac{1}{3}}$ 成正比的，这样就可以推得 $\omega_1\sim\rho^{\frac{n}{2}-\frac{1}{6}}$。

現在压强和总的能量就很容易用 F 来單値地表示了:

$$p=-\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_T=\frac{B}{v^n}+\frac{c_{v1}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)T}{v}, \tag{20.6}$$

$$E=F-T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v=\frac{B}{(n-1)v^{n-1}}+c_vT. \tag{20.7}$$

拿这两个式子同公式(20.3)比照，我們可以看到，p 和 E 对温度的关系彼此是無論如何連系不起来的，这两个关系在(20.3)式的两側消去了。

在爆震理論中还要用到压强的等熵导数 $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S$。为了計算这一項，先从熵求起:

$$S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v=c_v\ln T+c_{v1}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\ln v+\text{const.}① \tag{20.8}$$

于是 $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S$ 就可以表为这样一个公式②:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S=\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v}.$$

这个式子里有下列几个导数

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T=-\frac{nB}{v^{n+1}}-\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\frac{c_{v1}T}{v^2},$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\frac{c_{v1}}{v},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v=\frac{c_v}{T},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T=\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\frac{c_{v1}}{v}.$$

---

① 熵公式中的常数在以后的关系里自然是用不到的。

② 参看朗道与利夫希兹合著:“統計物理学”(第二版)，苏联国立技术理論書籍出版社，莫斯科，1951，§ 16。

于是，所要的等熵导数便等于：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S=-\frac{nB}{v^{n+1}}-\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\left[1+\frac{c_{v_1}}{c_v}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]\frac{c_{v_1}T}{v^2}. \qquad (20.9)$$

(20.6), (20.7), (20.9)三个公式里都有 B, c_v, c_{v_1}, n 这几个参数。这些参数一般地并不能从理論上求出来。我們把它选得能满足經驗的 $D(v_0)$关系。

实际曲綫的形狀由兩个参数：n 和

$$\zeta=\frac{c_v}{c_{v_1}} \qquad (20.10)$$

来决定。p, E 和 $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S$ 三个式子应代入爆震方程(20.1)和(20.2)；这兩个方程我們在这里重写一次：

$$\frac{D^2}{v_0^2}=\frac{p}{v_0-v}=-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S,$$

$$E-\frac{1}{2}p(v_0-v)=Q.$$

这是兩个未知数 v 和 T 的方程組。由这兩个方程可以用相当麻煩的办法通过 D 把 v_0 表示出来，即表 v_0 为 D 的显式。不过我們要另用一种表示法，即引用一个無因次参数：

$$y=\frac{c_{v_1}Tv^{n-1}}{B}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right). \qquad (20.11)$$

参数 y 的意义極簡單：它是热力压强 $p_{热}$ 对彈性压强 $p_{彈}$ 之比：

$$\frac{p_{热}}{p_{彈}}=\frac{c_{v_1}Tv^{n-1}}{B}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)=y. \qquad (20.12)$$

热力部分的能量和彈性部分的能量也可以通过 y 表示出来：

$$\frac{E_{热}}{E_{彈}}=\frac{(n-1)c_vTv^{n-1}}{B}=\frac{n-1}{\frac{n}{2}-\frac{1}{6}}\zeta y. \qquad (20.13)$$

参数 y 可由零变到無限大。現在通过 y 来表示爆震方程中的各量。由方程(18.2)得

$$\frac{v_0-v}{v}=\frac{1+y}{n+\left[1+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]y}. \tag{20.14}$$

把这个式子代入(20.1)，并利用(20.6)和(20.7)的关系，便得下列公式:

$$v_0=\left(\frac{B}{Q}\right)^{\frac{1}{n-1}}\frac{n+1+\left[2+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]y}{n+\left[1+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]y}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{6\zeta y}{3n-1}-\frac{(1+y)^2}{2n+2y\left[1+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]}\right\}^{\frac{1}{n-1}}. \tag{20.15}$$

D^2 这个量我們按方程(20.2)表成 $D^2=\left(\frac{v_0}{v}\right)^2\frac{B}{v^{n-1}}pv$.

有了方程(20.15)，D^2 式子的后面兩个因子就可以求出来了。所以 D^2 是:

$$D^2=Q\frac{\left\{n+1+\left[2+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)y\right]\right\}^2}{\left(\frac{1}{n-1}+\frac{6\zeta y}{3n-1}\right)\left\{n+\left[1+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]y-\frac{1}{2}(1+y)^2\right\}} \tag{20.16}$$

現在来看一看 (20.15) 和 (20.16) 兩公式的極限情形。先設 $y\to\infty$。由(20.15)可見，这时 $v_0\to\infty$，也就是說炸藥的裝塡密度極小。这种情形在原則上說来应該导致类似气体爆震理論中的那些公式。經簡單演化后，得:

$$D^2_{y\to\infty}=2Q\left\{\left[1+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]^2-1\right\}. \tag{20.17}$$

但我們看到，这里所發揮的全部理論并未把作为極限情况的气体爆震理論包括在内。这在公式(20.17)中已經看到：与分子間的作用力有关系的多变指数 n，由于适应自由能量 F 的出發式子

而沒有去掉。关于分子在平衡位置左近作微小振动的假設，当然也不能用到气体上去。因此，这个理論在原則上只适用于大密度的物質。

气体爆震理論里的 $D^2=2Q\left[\left(\frac{c_p}{c_v}\right)^2-1\right]$。从热力学上得知当 $T\to\infty$ 时，

$$\frac{c_p}{c_v}=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}\to 1+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right).$$

所以，当 $T\to\infty$ 时，爆震速度是与炸藥的裝填密度無关的，但 $\frac{c_p}{c_v}$ 这个比值却并不同气体的一样，因为这里面包有 n。

再看另一極端的情形 $y=0$ 也很有趣。这时应了解为一切化学能量 Q 都变成彈性能。这时溫度等于零。当然，真正的零度是不可能达到的，因为在絕对零度时，熵等于零。但因为爆炸物的熵在进行爆震以前不等于零($T_0>0$)，在爆震时熵值無論如何是不可能減少的。然而，确有裝塡密度大得很的炸藥，它的热能只等于彈性能的几分之一。这就相当于 y 趋于零的情形。

設 $y=0$，則

$$D^2=2Q(n^2-1). \tag{20.18}$$

公式(20.18)与(20.17)在形式上有相似的地方。因为当 $T\to 0$ 时所得到的極限規律 $p=\frac{B}{v^n}$ 中有多变指数 n，所以 n 就代替了等熵指数 k。但我們絕不能拿 $y=0$ 时的 D 对 v_0 的函数关系来同(20.18)式对比，因为公式(20.18)是对应于一定的初始比容的：

$$v_0=\left(\frac{B}{Q}\right)^{\frac{1}{n-1}}\frac{n+1}{n}\left[\frac{n+1}{2n(n-1)}\right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{20.19}$$

(20.19)是炸藥的極限裝塡密度，而按(20.18)式計算的 D 是極限的爆震速度。

必須强調，(20.18) 并不是濃集爆炸物的爆震速度的一般公

式。这从(20.18)式中沒有装填密度在内就可看出来了。只有当装填密度是(20.19)式的一个值时，D 才可能达到(20.18)式的数值。装填密度較小时 D 应按(20.15)和(20.16)公式的参数形式計算。

至于装填密度更大时怎么样，还不很清楚。那时可以假定分解反应不会徹底，因为化学能的存量不足以克服分子間排斥力的彈性功。化学能不够分子在爆炸时重結合的需要。

但这里要着重指出，严格說来，当装填密度为任意値时，而 $\zeta<\infty$ 的話，是不可以拿(20.18)同多变方程 $p=\frac{B}{v^n}$ 一起用的。关于这我們在本节的起头已經从总的方面說过。不过这样的錯誤有时还有人犯。即使誤差在数値上不大，無論如何也应該估計到。

現在說一說怎样从实驗数据上去求定 n 和 ζ 二値。对于許多硝基化合物的炸藥(泰安、特屈兒、苦味酸、TNT) 其装填密度在 1—1.7 克/厘米^3 左右的，实驗發現 D 約与 $v_0^{-0.81}$ 成正比。这个極限指数(-0.81)，显然可以当作 $\left(\frac{\partial \ln D_0}{\partial \ln v_0}\right)_{y\to 0}$ 去計算。

这个导数按 (20.15)—(20.16) 兩公式去求。經一些基本而冗長的运算后得:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \ln v_0}{\partial y}\right)_{y\to 0}=\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{n+1}\left[\frac{3n}{2}+\frac{1}{6}+2n(\zeta-1)\right],\\
&\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \ln D}{\partial y}\right)_{y\to 0}=\\
&\qquad\qquad=-\frac{n}{n+1}\left[\frac{n}{2}-\frac{5}{6}+(n-1)(\zeta-1)\right],\\
&\left(\frac{\partial \ln D}{\partial \ln v_0}\right)_{y\to 0}=-\frac{n\left[\frac{n}{2}-\frac{5}{6}+(n-1)(\zeta-1)\right]}{\frac{3}{2}n+\frac{1}{6}+2n(\zeta-1)},
\end{aligned}\right\}\qquad(20.20)$$

从这个公式可以很簡單地找到 ζ 与 n 的关系式，只要使

$\frac{\partial \ln D}{\partial \ln v_0}=-0.81$。这样我們就可以得到正确的$D(v_0)$曲綫的極限行程。使(20.20)的右側等于$-0.81$，得

$$\zeta=1+\frac{0.81(9n+1)-n(3n-5)}{6n(n-2.62)} \qquad (20.21)$$

無論在哪个場合，ζ值总是正的。因而$n>2.62$。这就是n的下限，如果擯弃n在0.82至0.30之間不合理的小数值[(20.21)式中分子的根]的話。当然，这样小的n值一般說来是不可能存在的，因为这时代入(20.17)会使$D_{最小}=0$。此外，按定义ζ必大于一。按公式(20.21)看，在这个限制之下n应小于4.06。4.06这个極限值是$\zeta=1$时的n值，因为ζ愈大n就愈小。

假如取$n=4.06$，$\zeta=1$，則按(20.17)公式得$\frac{D}{\sqrt{Q}}\approx 3.7$，而按(20.18)或最大的$\left(\frac{D}{\sqrt{Q}}\right)$等于5.5。其实从实驗上观察到的最大的$\frac{D}{\sqrt{Q}}$值約为3.4(这是泰安炸藥的数据)。显然，要說明实际爆炸物的性能就必須取$\zeta>1$，也就是說須計及当$v\to\infty$时其頻率不趋于零的那部分振动所具有的比热c_{v_2}。

至于n值，則可以按实驗曲綫考虑到$D(v_0)$关系的整个过程来加以选取。为此，应給予y以由零約至100的一系列数值，并代入(20.15)—(20.16)公式[阿列兹金做过这样的計算]。比較$D(y)$与$v_0(y)$，便得$D(v_0)$。

因为我們不知道$\frac{B}{Q}$值，所以只能作$\ln\frac{D}{\sqrt{Q}}$对$\ln\rho_0+\frac{\ln\frac{B}{Q}}{n-1}$的圖綫。横坐标的零点并不能單值地对应于按弗理德利赫关于泰安炸藥的数据而作的实驗曲綫$D(\rho_0)$。这条曲綫上的端点是$\rho_0=1.69$克/厘米^3，$D=8.4$千米/秒。但我們絕不能因此断言說，这一点的$\frac{\partial \ln D}{\partial \ln \rho_0}$值就是泰安炸藥的極限值了。因此，如把圖53的曲綫[这是当切点的極限斜率等于0.81，$n=2.8$时按(20.15)和(20.16)公式計算出来的理論曲綫]同圖54的曲綫(实驗曲綫)結合起来，那

我們是做得太随便一些了。

要做这个結合，得假定圖 54 上的 $\ln\rho_0=0.18$ 对应于圖 53 上的 $\ln\rho_0+\frac{\ln\frac{B}{Q}}{n-1}=0$。所以 $\ln\frac{B}{Q}=1.8\times(-0.18)=-0.324$，或 $\frac{B}{Q}=$ $=0.473$。

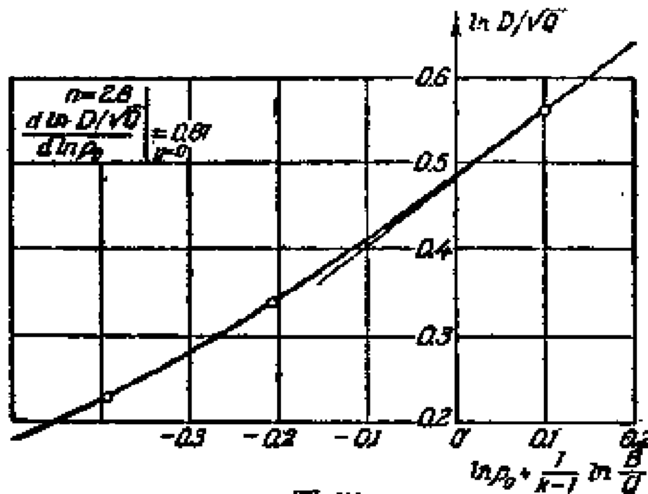


圖 53.

这样根据曲綫建立的狀况方程（$n=2.8$, $\zeta=4.8$, $B=$ $=0.473Q$），在沒有經过另一种完全独立的实驗方法驗証之前，是不能認为在物理上就是对了的。既有三个参数可以支配，我們簡直可以使任何一个关系符合于实驗結果。

可惜，現在除了爆震速度的数据之外，我們还沒有掌握其他的數据。因此，如以蘭道和斯坦紐柯維奇的狀况方程为依据来作进一步計算的話，都是帶有預料性質的，是需要实驗来驗証的。只有多方面的檢驗才能說明理論同实际究竟符合到什么程度。但按这个理論选取参数，預見性很稳定，这就在一定程度上証实了这个理論的准确性。为此，我們在表 XI 上引載了兩个 n 值（$n=2.8$ 和 $n=3$）之下，D, w, ρ, p 各値随 ρ_0 的变化情形。$n=3$ 的情形我們在 § 6 里已經見到过，这是作气体动力学計算最使人感兴趣的一种情况，因为这时方程的形式最簡單。果如

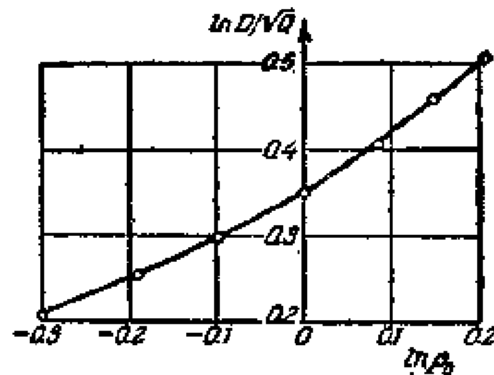


圖 54.

表 XI.

$n=2.8$

ρ_0克/厘米³	D千米/秒	w千米/秒	ρ克/厘米³	$p\times10^3$气压	$y=\frac{p_{热}}{p_{弹}}$
1.9	9.05	2.38	2.57	412	0.0
1.7	8.25	2.20	2.32	310	0.01
1.5	7.5	2.0	2.05	218	0.04
1.3	6.70	1.85	1.78	159	0.10
1.1	5.95	1.65	1.52	112	0.17
1.0	5.60	1.55	1.39	90	0.21
0.8	4.85	1.40	1.13	56	0.36
0.6	4.10	1.25	0.87	32	0.66
0.4	3.45	1.20	0.60	16	1.33

表 XI.（續）

$n=3$

ρ_0克/厘米³	D千米/秒	w千米/秒	ρ克/厘米³	$p\times10^3$气压	$y=\frac{p_{热}}{p_{弹}}$	实驗D千米/秒
1.9	9.10	2.29	2.55	388	0.04	
1.7	8.35	2.15	2.30	304	0.10	
1.5	7.60	2.03	2.04	232	0.18	7.52
1.3	6.90	1.90	1.78	172	0.29	6.70
1.1	6.30	1.78	1.53	124	0.49	5.9
1.0	5.95	1.73	1.41	103	0.62	5.50
0.8	5.35	1.65	1.15	71	1.00	4.90
0.6	4.80	1.60	0.90	48	1.84	4.25
0.4	4.41	1.57	0.62	28	4.00	3.65

所料，裝填密度愈大，即 y 值愈小时，理論同实际愈符合。

有趣的是，在同一裝填密度之下，对应于 $n=2.8$ 和 $n=3$ 兩种情况的 y 值極不相同的时候，实际观察到的主要物理量彼此倒是比 y 接近得多的。

我們看到，願意的話，狀况方程中的参数选擇是可以做到很准确的。为此需要求 y 值，在这个 y 值下，实驗的 $\frac{\partial \ln D}{\partial \ln v_0}=-0.81$;

然后重新选擇参数 n 和 ζ，以使理論曲綫同实驗曲綫重合．不过已經不是按相切的極限位置而是按 y 値的極限去重合。这將是一种反复演算的过程，进行反复演算时，已知的参数值是零次近似的数值。不过表 XI 上所列的关于参数选擇結果的稳定性使我們相信，零次近似在实用上已經足够了。

化学反应完畢之后，爆震产物作等熵膨脹。这时，爆震产物由極端濃集狀况，密度在 2 克/厘米^3 左右，膨脹成为气态物。显然，藺道和斯坦紐柯維奇的濃集爆炸物狀况方程是不能用于膨脹的一切阶段的。因此他們把絕热膨脹过程划分为兩个阶段；第一个阶段，把一切能量都看作是彈性能，也就是說膨脹是按多变过程 $pv^n=$ 常数进行的，第二个阶段假定膨脹是按理想气体的規律进行的，也就是說按泊松的等熵律 $pv^k=$ 常数进行的，这个 $k\sim 1.3$ 或小于 1.3。为了求这兩个規律的搭接点，他們利用了下法。

設反应完畢时爆震产物所具有的能量等于 E。由热力学得知

$$E=\int_{v_1}^{v} p\,dv,$$

这是因为爆震产物的膨脹是等熵的緣故。实际上，若是完全膨脹的話，$E=\int_{v_1}^{\infty} p\,dv$，因为当 $v=\infty$，$E=0\ (T\to 0)$，这个积分包括整个的膨脹过程，v_1 是爆震产物的初始比容。

使 p_κ 和 v_κ 分别代表搭接点的压强和比容。积分范圍需要划分为兩段：由 v_1 至 v_κ，再由 v_κ 至 v；这个 v 是爆震产物膨脹到大气压强时的比容。在第一段里，膨脹律取为 $pv^n=p_1v_1^n$，在第二段里取为 $pv^k=p_\kappa v_\kappa^k$，便得

$$\frac{p_1v_1}{n-1}-\frac{p_\kappa v_\kappa}{n-1}+\frac{p_\kappa v_\kappa}{k-1}-\frac{pv}{k-1}=E.$$

k 值在 1.3 左右。因此 $\frac{1}{k-1}\gg\frac{1}{n-1}$。$p_\kappa v_\kappa$ 这个乘积較 pv 大

得多,因为 $p_x v_x = RT_x$,而 T_x 比終了温度高得多。因此,求 $p_x v_x$ 的方程成为:

$$\frac{p_x v_x}{k-1} = E - \frac{p_1 v_1}{n-1}. \qquad (20.22)$$

能量按方程(20.2)計算:

$$E = Q + \frac{1}{2} p(v_0 - v).$$

方程右側的第二項可以用 D 来表示，这可以利用簡化后的爆震产物狀況方程(20.1)式。要紧的是,(20.1)式是在这样一个假設之下得到的,即一切压强全是彈性压强,而并未略去热力的能量。由方程(20.1)我們得到，$\frac{1}{2} p(v_0 - v) - \frac{p_1 v_1}{n-1} = \frac{D^2}{2(n^2-1)}$。因 $c_v = \frac{R}{k-1}$,所以

$$\frac{p_x v_x}{k-1} = c_v T_x = Q - \frac{D^2}{2(n^2-1)}. \qquad (20.23)$$

这个公式里的 D^2 小于 D^2 的極限値 $D^2_{極限} = 2Q(n^2-1)$。(20.23)中的 D^2 为爆炸产物的初始密度所决定。

現在以泰安炸藥为例,算一算 T_x, v_x, p_x 的数値,泰安的裝塡密度是 1.7。反应热現在等于 1450 大卡/千克 $= 6 \times 10^{10}$ 尔格/克。

設 $n = 3$。則 $D = 8.35$ 千米/秒,

$$\frac{D^2}{2(n^2-1)} = \frac{D^2 Q}{2Q(n^2-1)} = 0.72Q.$$

由是 $\qquad c_v T_x = 0.28Q = 400$ 大卡/千克。

假定爆震产物是双原子气体，分子量是 28，在温度为 T_x 时，一切振动自由度都已激發了,我們求得

$$c_v = \frac{7}{2} \times 2 \times \frac{1}{28} = \frac{1}{4} \text{ 大卡/千克·度}$$

因为这时模尔比热等于 7 大卡/模尔。最后求得 $T_x = 1600°$。

現在求 p_x 和 v_x。我們取 $k = \frac{9}{7} = 1.287$。由此

$$p_x v_x = \frac{2}{7} \times 400 = 143\ 大卡/千克 = 6 \times 10^9\ 尔格/克。$$

按多变方程 $p_x v_x^3 = p_1 v_1^3$;

这里的 $\rho_1 = 3 \times 10^{11}$, $v_1 = \frac{1}{\rho_1^3} = \frac{1}{2.3^3} = \frac{1}{12.2}$,

于是 $p_1 v_1^3 = 2.48 \times 10^{10}$。

这个式子用 $p_x v_x$ 除一下,得

$$v_x^2 = \frac{24.8 \times 10^9}{6 \times 10^9} \approx 4,$$

即 $v_x = 2$ 厘米^3/克,$\rho_x = \frac{1}{2}$。由此求 p_x,得

$$\frac{6 \times 10^9}{2} = 3 \times 10^9\ 巴 = 3000\ 大气压。$$

这个結果純粹是个估計,不过由此应得出一个結論:当强烈爆炸物作用在金屬上的时候,第二阶段的膨脹($v > v_x$)并沒有压强極高时的第一阶段那末大的作用。但如研究爆震产物在空气中的膨脹时,那末第二个阶段也是很重要的。

第五章　爆震产物的运动

§21. 有关爆震产物运动的某些平面一元問題

在这一节里我們要講的是随着爆震波而产生的爆震产物的一些运动問題。这些問題的解在有关爆震作用的各种实际問題上是有用的。

但这里先从爆震压强的量測問題講起比較合适，因为量測爆震压强無論在实用上，首先在估計爆震波的机械作用时，或是用它来檢驗爆震波內部結構的概念是否正确，以便进一步發展爆震波內部結構的概念，都是極重要的。

量測压强的主要困难在于，它的作用时間極为短促，在这样短促的时間內，变化又極快。直到現在为止还沒有人能把爆震波中的压强变化作出可靠的記录来。所有的只是計量爆震波最大压强的一些数据，其准确度有高有低。

第一批試圖量測爆震波压强的人里有狄克松(Диксон)及其同事。他們計量的是在玻璃管中进行爆炸的爆震波的靜压强。他們在同一批玻璃管里进行了混合气的爆震試驗。如果玻管在爆炸时破裂了，照狄克松說，这就是爆震波的压强超过了玻管的破裂靜压，于是下一次实驗就用管壁稍厚的管子。这种方法沒有能够得到准确的結果：首先因为同一根管子各部分的爆破压强可以相差到25—30%；其次，在爆震波剛發生的一瞬間，其压强比定型波的压强高得多，管子往往是在爆震波發生的地方破裂的。此外，有些研究者还錯誤地把动載荷的作用当作靜載荷的作用看（这一点已經与实驗方法的誤差無关了）。

堪拜尔等人[1]用来量测爆震波中压强的方法与上述的一种在想法上差不多。他們在爆炸管中横隔以各种厚度的金屬箔。对每一种混合气各找出能承受爆震波压强的最小厚度的金屬箔来。

然后設法决定使这种箔破裂所需要的靜压。他們假定用这种方法可以定出各种混合气的爆震波的相对压强来。

做实驗用的是很强有力的爆震混合气，其化学反应地帶是很狹窄的。这样，化学反应区中高压强作用的时間就十分短促；反射时压强相当准确地等于切点狀况下反射波的压强。压强作用在障碍物上的时間在数量級上等于$\frac{l}{D}$这个l是管長，D是爆震速度。

表XII上列的是堪拜尔量得的压强值。

表XII. 堪拜尔等人量得的靜压（能使極限厚度的箔片炸裂的靜压）
（$p_0=1$大气压）

混合气	$p_{靜}$(大气压)
$2H_2O+O_2$ ········	40.8
CH_4+O_2 ············	68.0
CH_4+8O_2············	44.8
$C_2H_4+3O_2$ ········	68.0
$C_2H_4+19O_2$········	38.0
$C_2H_2+O_2$············	88.0
$C_2H_2+15O_2$········	52.0

同計算值作比較后，發現表XII上所列的压强值正确反映了各种混合气的爆震压强的相对值，但沒有絕对意义。这从下述的事实可以看清楚：障碍物的材料强度所能經受的短促載荷比靜載荷可以高得多。

要量測爆震波中的压强分布以及量測爆震波在壁上的反射压强，最可靠的法子大概要算使用压电晶体指示器了，用来記录爆震波压强的压电晶体指示器应具有很高的固有頻率。

前面已經說过，直到現在为止还沒有誰能成功地把爆震波中的压强变化記录下来。但用压电晶体是可以把最大压强量出来

[1] 堪拜尔、李特尔与惠特菲斯合著："爆炸波中的压强量测"，文載 Proc. Roy. Soc. A137, 380, 1932。

的。这里我們来介紹一下契尔林斯基（Черлинский）的工作[①]，他是首先用压电晶体量測的一个，他在研究爆震时，成功地用压电晶体指示器記录了最大压强。他研究了醚与空气的混合气的爆震，所用的管子是直徑5厘米長9米的鋼管。管中裝了兩具固有頻率很高的压电晶体指示器：一具裝在管端头，另一具裝在距端头2米处。兩具指示器各連一具强大的直流放大器，电流最后通到示波仪上。为量測火焰的速度，管中另裝了六个放电間隙。火焰經过的瞬間，放电間隙被接通（火焰使混合气發生电离），电流經放大后通入示波仪。压强是在化学份量上准确的醚与空气的混合气中量測的。实驗不能很好地复演，其結果便很难作比較。因此每个实驗只好各量压强和速度，自行比較。

实驗指明，如果爆震波是离管端（裝压电晶体的那一端）还很远就定型的話，量得的压强是与理論計算同一数量級的。如果快速燃燒接近安裝压电晶体的管端头时爆震波才形成的話，量得的压强約为理論值的兩倍。

爆震波所产生的机械作用与波的結構大有关系。这是因为短时間載荷的破坏作用是决定于压力的冲量的。引起燃燒的震波的波头压强約为切点压强的兩倍。如果化学反应进行得很迅速，那末压强高于切点的那層气体便十分薄；这層气体的冲量同波的其余部分的冲量比起来便很小，这一層的存在对于整个波的机械作用并無大关系。如果反应比較慢，那末由于高压層厚度增大，它的冲量便可能大大增强爆震波的破坏作用。同时还应該計及，震波反射时压强可以提高到五六倍，而在切点狀况下的气体其反射压强不过提高到2.5倍。

这是因为震波中气体的速度較高，气体的密度又較大的緣故。

---

① 契尔林斯基著："乙炔与空气的混合气的爆震压强及燃燒速度的量測"，文載 Z.f.Technische Phys., 21,75,1940。

于是震波很厚的話，反射时压强能达到切点压强的 10—12 倍。

本节中我們限于討論濃集爆炸物的問題；同时大部分討論要利用到 § 19—§ 20 的主要結果；爆震等熵产物的方程是这样的

$$p=A\rho^3,$$

也就是說，等熵指数 $n=3$。反应区的厚度認为小到可以不計。

$n=3$ 的情形我們在 § 6 里已詳細分析过，§ 6 里詳細地闡明过的是 $n=3$ 时一切的气体动力学推論。其中說到，特性綫 J_+ 的

$$\frac{dx}{dt}=w+c$$

时它的推进是与特性綫 J_- 完全無关的[①]，J_-的

$$\frac{dx}{dt}=w-c.$$

当沒有震波存在时，$p=A\rho^3$ 这个方程是完全正确的。但在 § 5 末了曾說到过，一定强度的震波，只要强度不很大时，可以近似地当作准音波看，这就是說向右推进的震波对特性綫 J_- 的影响不大。所以，当 $n=3$ 时，如果震波的强度使压强譬如升高为 2.5 倍，那末如前述，波几乎与反方向的震波完全無关。

这里再把斯坦紐柯維奇方程写一遍：

$$\frac{\partial J_+}{\partial t}+J_+\frac{\partial J_+}{\partial x}=0, \qquad (21.1)$$

$$\frac{\partial J_-}{\partial t}+J_-\frac{\partial J_-}{\partial x}=0. \qquad (21.2)$$

式中的 $J_+=w+c$，$J_-=w-c$。

由(21.1)和(21.2)这两个方程可以找到 $J_+=J_+\left(\frac{x}{t}\right)$，$J_-=J_-\left(\frac{x}{t}\right)$这种形式的解。这可以从下面的推理上看出来。我們

① 关于爆震产物的一元运动有格黎勃和斯坦紐柯維奇研究过。参看格黎勃著："爆炸混合气进行爆震时引發地点对空气震波的参数的影响"，文载应用数学及力学杂志8, 273, 1944；又斯坦紐柯維奇著："烈性爆炸物的爆震产物的一元运动"，文載苏联科学院报告，58, 523, 1946；斯坦紐柯維奇著："斜爆震波的爆震产物的运动"，文載苏联科学院报告，55, 315, 1947。

既已假定反应区的厚度为零，那末在这个問題里，除了有具有速度因次的量（如 D）之外，便沒有其他任何的具有長度的量了。因此，这两个方程的解应該决定于無因次的复合量 $\frac{x}{Dt}$，这个复合量不論長度与时間單位怎样取都是不变的。显然，$J_+=J_+\left(\frac{x}{Dt}\right)$这样形式的式子应該能滿足(21.1)方程，不論取什么單位。假定問題里还有特性長度 l 在內，那就应有 $J_+=J_+\left(\frac{x}{l},\ \frac{Dt}{l}\right)$，这个式子与 $\frac{x}{t}$ 比無关。

只决定于 $\frac{x}{t}$ 的解，在气体动力学里称为自型运动的解。

自型运动$\left(\frac{x}{t}=\xi\right)$必有

$$\frac{\partial J_+}{\partial x}=\frac{1}{t}\frac{dJ_+}{d\xi},$$

$$\frac{\partial J_+}{\partial t}=-\frac{x}{t^2}\frac{dJ_+}{d\xi}=-\frac{\xi}{t}\frac{dJ_+}{d\xi}.$$

把这两个导数代入(21.1)式，得

$$(J_+-\xi)\frac{dJ_+}{d\xi}=0. \tag{21.3}$$

这个方程有两个解：

$$J_+=\xi=\frac{x}{t}, \tag{21.4}$$

$$J_+=\mathrm{const}. \tag{21.5}$$

同理(21.2)式也有两个自型运动的解：

$$J_-=\xi=\frac{x}{t}, \tag{21.6}$$

$$J_-=\mathrm{const}. \tag{21.7}$$

現在把这些解用于爆震波的推进問題。这可能有两种情形。

1. 爆震引子放在炸藥的自由边界上。

2. 爆震引子放在絕对剛体壁所包圍的界面上。

先說第一种情形。

当然得假定，炸藥具有無限大的平表面，爆震波遍及整个平面，而且平面上所有各点的爆震是同时开始的，同时向炸藥內部深处推进。

在自由表面上，压强假定为零。但根据狀况方程，$p=0$，也就是說 $\rho=0$，因而 $c=0$，又因 $J_+=w+c$，所以在自由边界上，$J_+=w$，这个 w 是物質的当地速度。

假定爆震波由边界向右推进，那我們的解应該用到 $J_+=D$ 那一点为止，因为在波头上 $x=Dt$，$\frac{x}{t}=D$。但同时 $J_+=w+c$，因而在波头上确实 $D=w+c$，这也正是相切的条件所要求的。波头之右的物質还沒有进行爆炸，波头之左是膨脹波，直到自由表面为止，自由表面的 $J_+=\frac{x}{t}$，$J_-=\text{const}$. 关于这些膨脹波，其解应这样选，按(21.4)

$$x=(w+c)t, \tag{21.8}$$

按(19.8)

$$J_-=w-c=(w-c)_{波頭}=\frac{D}{4}-\frac{3D}{4}=-\frac{D}{2}, \tag{21.9}$$

这是因为在波头上，$c=\frac{\rho_0}{\rho}D=\frac{n}{n+1}D=\frac{3}{4}D$ 的緣故。而在自由表面上，$c=0$，于是 $w=-\frac{D}{2}$，这就是說向左推进的膨脹波的速度等于爆震速度的一半。这里要强調一句，这个关系只当爆震由自由表面开始才是对的。如果爆震波从炸藥內部往外走向表面，那就会得出另一种結果，这在下面要講到。

爆震产物向左和向右运动兩部分的分界在 $w=0$ 点，該点的 $x=\frac{Dt}{2}$，因而 $c=\frac{D}{2}$。

w 和 c 的分布分别画在圖 55 上。

現在再說第二种情形，爆震波不是从自由表面开始，而是从絕对剛体的界壁开始的；在壁面上，边界条件是 $w=0$。而在 $x=\frac{Dt}{2}$

点，我們知道也有 $w=0$，因此，在 $x=0$(壁面)与 $x=\frac{Dt}{2}$ 之間是个静止区，在这个区里，解是(21.5)：

$$\left.\begin{aligned} J_{+}&=\frac{D}{2}, \\ J_{-}&=-\frac{D}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{21.10}$$

現在假定爆震波在炸藥的中間某个平面上發生，然后向兩边推进。那时，直到兩个波走出来以前，起始爆震的那个平面总是有 $w=0$ 的，这是簡單地由于对称形势造成的：向右与向左推进沒有一点不同，沒有任何理由使該平面上的气体向这边或那边运动。由此可知，起始平面($x=0$)同剛体壁的作用一样。

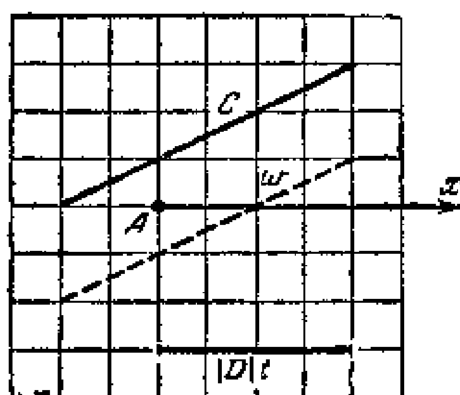


圖 55.

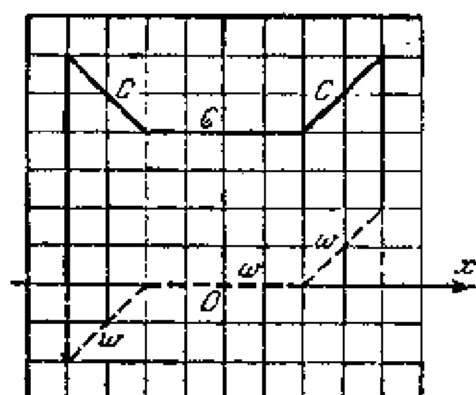


圖 56.

向右去的运动，先是靜止区，$J_{+}=\frac{D}{2}$，$J_{-}=-\frac{D}{2}$，然后是膨脹波，$J_{+}=\frac{x}{t}$，$J_{-}=-\frac{D}{2}$；向左去的运动，先也是靜止区，$J_{+}=\frac{D}{2}$，$J_{-}=-\frac{D}{2}$，然后是膨脹波，$J_{-}=\frac{x}{t}$。在 $x=\frac{Dt}{2}$ 和 $x=-\frac{Dt}{2}$ 兩点，兩个解各有一个破折：w 和 c 兩个量在这兩点上都是連續的，但其导数有突躍，像圖 56 所画的那样。

破折点的推进速度，或称弱突躍的推进速度，等于 $\frac{D}{2}$，卽等于当地音速 c。这是弱突躍的一般特性。波头上的压强与靜止区

压强之比等于該兩区中当地音速比的三次方：$\left(\frac{3}{4}\right)^3:\left(\frac{1}{2}\right)^3=$ $=3.375$。

現在我們要从在兩个方向無限制的炸藥，轉而談到封閉在絕对剛体壁管子之中的炸藥了。

在波卽將走出表面的瞬間，靠近出口面全部介質的 J_+ 及 J_- 的分布都是給定了的。以后的膨脹便仅仅决定于这些初始的 J_+ 及 J_- 分布以及(21.1)和(21.2)兩方程了。膨脹波在爆震产物中由边界向爆震波的反方向推进；下面就要証明，在現在所取的近似下，在自由表面上，$c=0$，$w=D$。如果再考虑到爆震产物的热能的話，那末飞散的速度应$>D$(参看后面)。所以，在 $n=3$ 的情形之下，又不考虑热能的話，飞散的速度(对于靜止介質而言)就等于爆震波的速度。

§6 里詳細講过解(21.1)—(21.2)方程組的圖解法。那里講的是原来靜止且具有均一密度的一定部分气体向真空飞散。这些气体可以設想为濃集爆炸物密封在絕对剛体筒罐中爆炸后所产生的。等到燃燒过的一切介質压强都已均一，运动由于粘性的摩擦作用已消灭之后，設想筒罐的底壁突然除去，气体便在絕对剛体的等直徑管中进行膨脹。

在§6 里这个問題一直解到終了，不过用的都是相对値。現在改用絕对値，并假定說的是泰安炸藥的爆震产物。

在§8 的末了証明过，封閉罐中爆炸所达到的压强仅及爆震波头上的一半。那是按产物的热能計算出来的，热能完全决定了压强。現在我們反过来，略去热能不計，認为压强是仅仅为密度所决定的，完全是彈性压强。在封閉罐內进行爆炸时，密度是不会变的，必等于原先的密度，而在爆震波的波头上密度則等于原先的 $\frac{4}{3}$，所以封閉罐中爆炸的压强与爆震波的压强成这样一个比値：

$\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$。

根据我們的計算，原始密度为1.7的泰安炸藥，它的爆震波压强等于3×10^5大气压，因而在封閉罐中压强应是1.25×10^5大气压。爆炸产物的起始音速約等于4800米/秒。这些数値就可以用来决定§6中那个問題的一些代表性的比例尺。

这里我們来用同一方法解决兩个稍复杂些的問題。

第一个問題是斯坦紐柯維奇用解析法求解过的[1]。这个問題如下：爆震在爆炸物内部某个平面上开始；这个平面到兩端自由表面的距离分別是a和b。还是同以前一样，假定运动到处都是一元的。求自爆震开始直至完全飞散为止爆震产物的运动，其中一直假設$n=3$。

在米制方格紙上作圖解很方便，因为那时只要保持一定的比例尺关系就行了。水平方向的比例尺与鉛直方向的無关，但一切横坐标和一切縱坐标自身应符合一致。

作此圖时所取的$b=\frac{a}{2}$(参看圖57, I中的a, b兩点)。I是向左推进的波恰达b点那一瞬間的情形，也就是說左边波已达炸藥的自由表面，而右边尙未达到自由表面的那一瞬間。上边的实綫是c的分布曲綫，下边的虛綫是w的分布曲綫。$J_+=w+c$和$J_-==w-c$这兩条曲綫的構作只对左半边圖形有意义。这也从單位(1)只放在圖57, II的左半得到說明了。右半的运动，直到波达到表面a为止，是独立地按(21.6)—(21.8)方程計算的。由§6我們知道，J_+与J_-兩曲綫应合成封閉的圖綫，凡是需要的地方应該用鉛直綫段接連起来。J_+和J_-兩曲綫起自左下角圖I, 1, J_+在上面，J_-在下面。

---

[1] 斯坦紐柯維奇著："烈性爆炸物的爆震产物的一元运动"，文載苏联科学院报告，53, 523, 1946。

現在取另一鄰近的瞬間来看。这时凡縱坐标値为正的点都向右移，凡縱坐标値为負的点都向左移，各点的移动与其縱坐标値成正比。結果圖形取圖 57 *II* 中記为 2 的那个位置。將移动后的圖形分解成

$$c=\frac{J_+-J_-}{2} \quad 和 \quad w=\frac{J_++J_-}{2},$$

便得圖 57 *III* 的左半边。

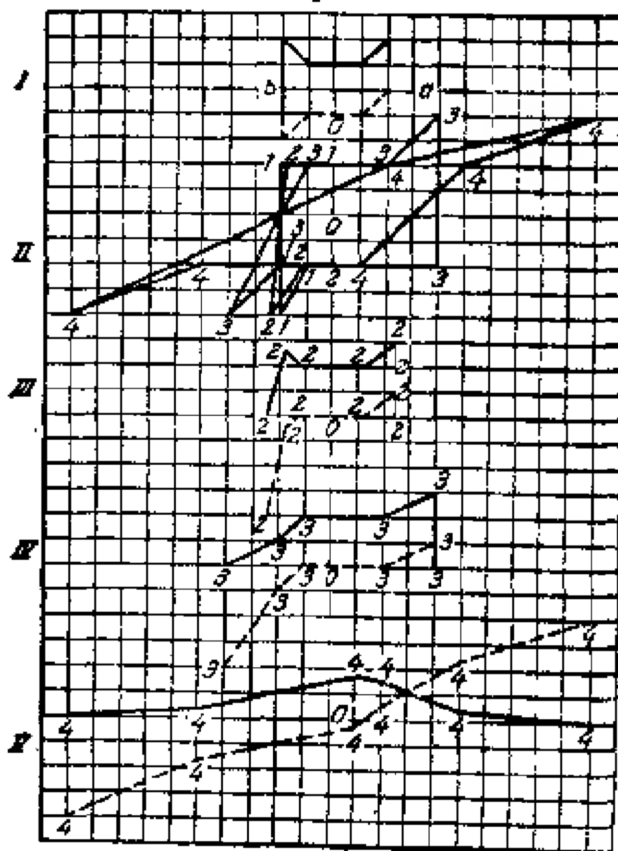


圖 57.

我們看到，这里發生了膨脹波，膨脹波从自由表面向介質內部推进(圖 57, *III* 中折綫的左端一段)。

对于固定坐标系說来，介質的运动自然是向左去的，而且端头那点的速度証明是 D，这直接从圖上就看出来了。

圖 57 *III* 的右半边也是用同一比例尺画出来的：波头以速度 D 向右推进得正像介質的左端向左推进得一样多，而弱突躍則向右推进一半的距离。

現在我們来看右边的波到达 a 面出去的瞬間，从这一瞬間起，兩边都能用圖解法了。由于向左推进的自由表面以速度 D 在推进，到那一瞬間該面已移动了距离 b，这是因为 $a=2b$ 的緣故。由此就很容易求出其他折綫角頂的位置来了，这些角頂的位移各与其縱

坐标成正比。这样便得到了曲綫 333。把这条曲綫分解为 c 和 w，得圖 57, IV。

膨脹波与由左而来的弱突躍波相遇后，又得一膨脹波，于是在自由表面附近便有了兩道膨脹波，它們对介質說来是向右推进的。在 111 的位置上兩道波彼此相向而走。

取更晚些的一个瞬間来看，那时作出来的曲綫用 4 来标明。圖形向右移动的那一半，其起始时間应該認为較向左移动的那一半为迟。右上点由 3 至 4 的实际位移也就是左下点由 3 至 4 的位移，因为在瞬間 3 之后，这兩点都以同一个速度 D 向兩个方向移动。我們可以把 3 的位置算作是整个圖形的起点，时間就由这个位置算起。在 4 的位置上，左右兩边的波相遇，产生另一个膨脹波，这是第五个膨脹波。这个膨脹波是折綫 4444… 的中間那一段（圖 57, V）。所以 c 的曲綫再沒有水平段了，而 w 則除一点外全不等于零。这是飞散的最后一个阶段，这时整个介質都在运动中。

圖 57, II 上各角頂的坐标都很容易用 x, t, a, b 和 D 解析地表示出来，这样就可以得到折綫每一段的方程。于是便得到了解析式子。斯坦紐柯維奇用这些式子計算过，在整个飞散期間从引發点向左右兩边飞散开去的質量，以及这些質量所帶走的动量及动能。現在把这些公式推导出来。

飞散到長度为 a 的那一端头去的質量是（这里的質量指的是通过單位截面积的質量，其他的物理量也是指單位截面积而言的）：

$$M_a = \frac{\rho_0}{9}(4a + 5b), \tag{21.11}$$

飞散到 b 端的質量是

$$M_b = \frac{\rho_0}{9}(5a + 4b). \tag{21.12}$$

兩边飞散的动量都是（因为飞散是內力作用的結果，当然兩边的动

量是相等的):

$$J_a = J_b = \frac{4}{27}\rho_0 D(a+b). \qquad (21.13)$$

这些結果可以用于这样的一类問題：爆震波由絕对剛体壁面向炸藥的自由表面推进的問題。剛体壁的作用等于另有一段等長度的炸藥存在，这塊炸藥也与实給的那塊炸藥同时引發，爆震波却向反方向推进。由对称可知，在兩塊炸藥的中間引發爆震时，恰居中間的介質其速度必永等于零。这一事实看圖 57 就明白了：假定 $a=b$，那末在引發点的速度必定是零，$w=0$，兩半边的爆震都相当于由剛体壁向外推进的爆震。所以作用在單位面积剛体壁上的冲量应等于

$$P = \frac{8}{27}\rho_0 Da. \qquad (21.14)$$

飞散的动能分別等于

$$E_a = \frac{\rho_0 D^2}{432}(16a+11b), \qquad (21.15)$$

$$E_b = \frac{\rho_0 D^2}{432}(11a+16b). \qquad (21.16)$$

如果爆震波是从一个自由端推进到另一自由端的 ($b=0$)，則比值 $\frac{M_a}{M_b}=\frac{4}{5}$，$\frac{E_a}{E_b}=\frac{16}{11}$。在炸藥那一端，即爆震波向那边推进的一端，飞散的質量較少，但帶走的能量則較多。爆震的能量分布在一定程度上决定于引發点的位置。

按問題的复杂性說来，下一个問題是爆震波对剛体壁的冲击問題[1]。由对称可知，这就等于兩个爆震波相互撞击，这兩个爆震波同时由一塊兩倍長的炸藥的兩自由端开始。这时互撞点的速度一定是零，$w=0$，正像撞在剛体壁上一样。所以圖 58 上左右兩半

[1] 澤尔道維奇与斯坦紐柯維奇合著："論平面爆震波的反射"，文載苏联科学院报告，55，591，1947。

的任何一半都是反射問題的解答。

这个問題之所以較前一个問題复杂，在于有反射的震波参加在内，反射震波是在反应产物里面推进的。正如我們將看到的，在反射的一瞬間，波幅增为 2.37 倍，所以还可以用 § 5 的准音波近似理論。換句話說，可以假定向右推进的震波不影响 J_+ 特性綫，而向左推进的震波不影响 J_- 特性綫，这样假定不致引起很大的誤差。这，如 § 6 里說过的，只要用震波去替代那用圖解法解 (19.1) 和 (19.2) 方程所得到的三値曲綫就行了，这个震波应該保有全部在运动中的質量。

圖 58, *I* 表示兩个爆震波互撞瞬間 c 和 w 的分布情形。兩个 a 点标記炸藥的原始長度，已計及自由表面的运动速度只有波的推进速度的一半这样一个事实。圖 58, *II* 里的曲綫 *111*… 是 J_+ 和 J_- 的初始分布。經过一段时間之后，这个圖形取 *222*… 这个位置，因为每一点的移动都与它自己的縱坐标成比例。把曲綫 *222* … 分解为 $c=\frac{J_+-J_-}{2}$ 和 $w=\frac{J_++J_-}{2}$，就得到兩条之値曲綫(圖 58, *III*)。根据这兩条曲綫很容易定

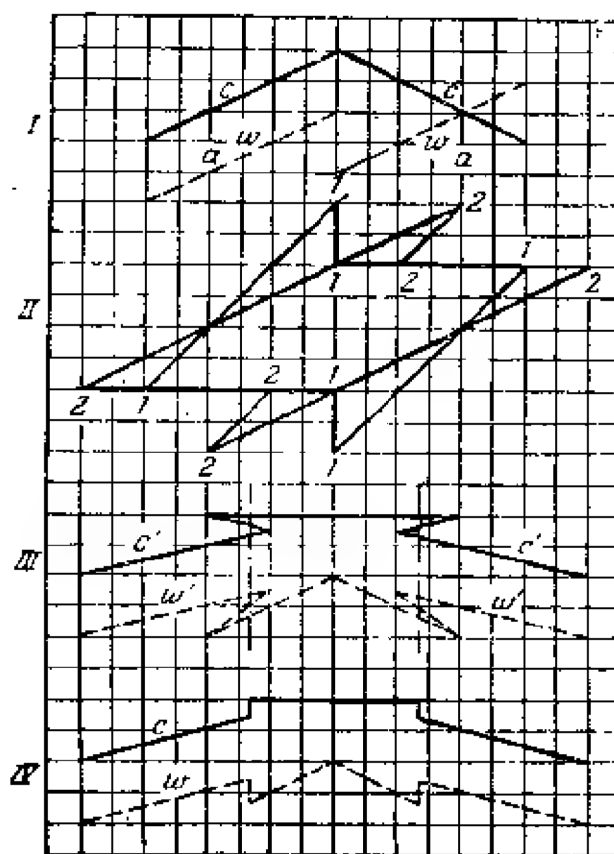


圖 58.

出震波的位置来，即只要在圖 58, *III* 上找出一个截面来，使这截面兩側的兩个三角形所包含的面积相等，这个截面的位置就是震

波的位置了。这样做能保証質量相同。c 和 w 的最后分布情况如圖 58, IV 所示。

很有趣，反射波中的 c 因而反射波中的压强都是随时間变化的，但对坐标而言却是定値。在反射那一瞬間，$c_1=\frac{4}{3}c$，那时的压强增为 $\left(\frac{4}{3}\right)^2=2.37$ 倍；因 $\rho_1=\frac{4}{3}\rho, \rho=\frac{4}{3}\rho_0$，所以得 $\rho_1=\frac{16}{9}\rho_0$。这只要就很接近于初始的瞬間去分解圖 58, II 馬上就能看到的。

时間过很久之后，震波中压强的相对幅度升高了，近似解就愈差愈远了。当炸藥膨脹到八倍的时候，甚至得到这样的結果：反射震波达到自由表面；这在物理上是無稽之談，因为在精确解中，只有無限膨脹时，反射震波才能达到自由表面。所以，这里所得到的解答只适用于不太大的膨脹。

我們看到，八倍膨脹对应于剛体壁上压强等于初始压强的 $\frac{1}{1660}$，因此解答的誤差在烈性炸藥对金屬的作用問題上是沒有什么关系的。

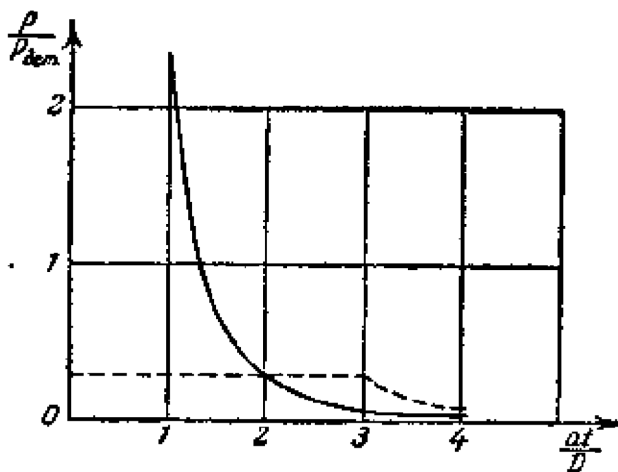


圖 59.

波对剛体壁的总冲量是

$$P=\frac{8}{27}\rho_0 Da, \tag{21.17}$$

这也就是波由剛体壁向外推进时的总冲量，波冲向剛体壁时最大压强發生在撞击瞬間，其値等于波由壁向外推进时最大压强的八倍。圖 59 上的虛綫是波由壁面向外推进时，剛体壁上压强随时間的变化曲綫（时間以 $\frac{a}{D}$ 为單位），而实綫是波向剛体壁推进时壁面上压强的变化曲綫。这兩条曲綫下面所包的面积相等。在压强曲綫下降的部分，

压强与时間(由运动开始算起)的三次方成反比，很像 § 6 里說过的情形。

确实，波向剛体壁射入时，半徑方向的飞散使冲量約减少$\frac{1}{5}$。

上面我們再三提到，本节中到此为止所得到的解答只适用于飞散的起始阶段，那时 $p = A\rho^3, \rho \sim c$。在这个范圍里，爆震波走出表面时，介質微团的运动速度变为等于爆震速度 D。但实驗却指明，介質微团所达到的速度还要高得多①。

为說明这一情况，我們回去看一看代表爆震产物膨脹过程的(20.23)方程。我們在前面已經引用过这末一个狀况，其狀况参数值为 $p_\kappa, v_\kappa, \rho \sim c$，爆炸产物达到这个狀况之后就开始按等熵方程 $pv^k = p_\kappa v_\kappa^k (k \sim 1.3)$ 变化了。而这个狀况 p_κ, v_κ 本身也是由爆震波的初始狀况按等熵关系 $p_\kappa v_\kappa^n = p_H v_H^n$ 变来的，式中的 p_H, v_H 是切点的参数值。p_κ, v_κ 还有一个方程(20.20)

$$c_v T_\kappa - \frac{p_\kappa v_\kappa}{k-1} = Q - \frac{D^2}{2(n^2-1)},$$

这样，p_κ, v_κ 和 T_κ 三个参数值便是完全决定了的。

蘭道和斯坦紐柯維奇利用了他們所引用的狀况 p_κ, v_κ，解决了普通炸藥的爆震产物的一元飞散問題②。

假定爆震波从無限的半空間走出自由表面。这时，必有膨脹波在介質里从表面起向反方向推进，波所扫过的介質的狀况为 p_H, v_H。解这个問題所用的公式就是 § 2 里的(2.5)式:

$$w - w_H = -\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c\,d\rho}{\rho}. \qquad (21.18)$$

---

① 波克罗夫斯基(Г. И. Покровский)著: “爆炸的方向作用”，苏联軍事出版社，莫斯科，1942。

② 格黎勃在他們之前，对爆炸产物的狀况方程用了别种假設，也解决了这个問題。参看格黎勃著: “可爆混合气进行爆炸时引發点对空气震波的参数的影响”，文載应用数学及力学杂志，8, 273, 1944。

波走了無限远距离之后，圖 55 上的綫段便是水平的了，而 p_H 和 v_H 也就可以認为是常数，其数值同切点的一样。当 $n=3$ 时，$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dc}{c}$，于是 $w=w_H+c_H=D$，这是因为在膨脹过程終了时假設 $c=0$。

現在为了計算狀况 p_κ, v_κ 必須分成兩段来积分：在第一段里設 $n=3$，第二段里設它是等熵变化，等熵指数 $k=1.3$。这时

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{2}{k-1}\frac{dc}{c}.$$

假定向真空中膨脹，則終了的 $c=0$，于是按(21.18)，

$$w=w_H+c_H-c_\kappa+\frac{2}{k-1}c_\kappa=w_H+c_H+5.67\,c_\kappa=D+5.67c_\kappa. \quad (21.19)$$

举例来說，假定有初始密度 $\rho_0=1.5$ 的泰安炸藥进行爆震；其爆震速度等于 7.52 千米/秒。这时

$$c_vT_\kappa=Q-\frac{D^2}{16}=1450-850=600\text{ 卡/克。}$$

或用 CGS 制：

$$p_\kappa v_\kappa=0.3\times2.5\times10^{10}=0.75\times10^{10}\text{ 厘米}^2/\text{秒}^2\text{。}$$

我們知道 $c=\sqrt{kp_\kappa v_\kappa}=\sqrt{0.975}\times10^5$ 厘米/秒～1千米/秒。所以，向真空中膨脹的速度等于

$$w=7.52+5.67=13.19\text{ 千米/秒。}$$

在空气中进行膨脹时，爆震产物之前必形成震波，这道震波延緩介質的飞散。这种震波里的溫度較 T_κ 高得多，这是用大密度的介質压縮小密度的介質时必有的現象①。溫度很高时，空气的等熵指数接近于一；蘭道和斯坦紐柯維奇作計算时，徑設等熵指数为一。

如果利用气体各定律去計算震波中的空气溫度，那就会得到極巨大的数字，約为 20000—30000°，事实上因有大量的能量消耗

① 澤尔道維奇著："震波原理及气体动力学引論"，苏联科学院出版社，1946。

于分解及电离，温度比这个要低得多。所以，使用不等于一的定值等熵指数反正是不合适的。

設空气震波中的压强等于 p。爆震产物中的压强逐渐下降而趋于这个値。我們假定进行爆炸的物質是無限的，因而膨脹时空气波中的压强是常数值。

压强的分布表示在圖 60 上。圖上画了被压縮的空气与爆震产物二者的分界面，在这个分界面上爆震产物的压强达到 p。空气中的震波是極强烈的，所以可以用(3.6)公式，那个公式在等熵指数为一时成为

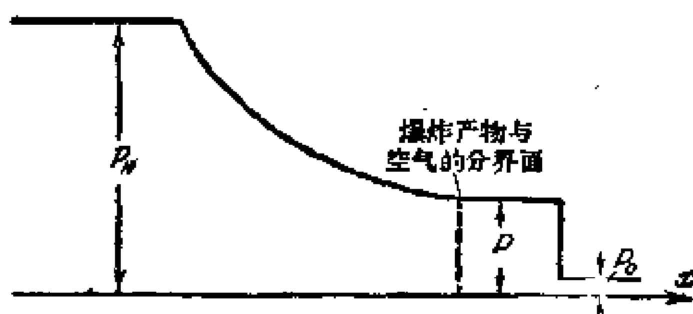


圖 60.

$$w=\sqrt{\frac{p}{\rho_a}},$$

式中的 ρ_a 是空气的原始密度，其値等于 1.3×10^{-3} 克/厘米^3。速度 w 应按連續关系計算，它是膨脹波中爆炸产物所达到的速度。如果压强由 $p_н$ 降为 p，則按等熵方程，爆炸产物中的音速也必隨之下降，其比例关系是

$$\frac{c}{c_н}=\left(\frac{p}{p_н}\right)^{\frac{k-1}{2k}},$$

因为 $c\sim\rho^{\frac{k-1}{2}}$，所以 $\rho\sim p^{\frac{1}{k}}$。現在使爆炸产物与空气的分界面上兩种气体的速度相等，卽得①：

$$\sqrt{\frac{p}{\rho_a}}=D-c_н+\frac{2}{k-1}c_н\left[1-\left(\frac{p}{p_н}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\right]. \qquad (21.20)$$

① 由于空气中的震波極强，而空气層極薄，所以空气的速度接近于震波的速度。

要由(19.16)得出能作数值計算的方程,先得解出p_x来。我們仍用前面那个向眞空飞散的例子,来估計一下空气的作用。这时得

$$p_x v_x = 0.75\times 10^{10}\ 厘米^2/秒^2。$$

另一方面按§18表X上所列的数据,

$$p_x v_x^3 = p_H v_H^3 = 2.73\times 10^{10}.$$

由此得$v_x^2=3.64$, $v_x=1.906$, $p_x=0.394\times 10^{10}$巴。改用無因次数值,$x=\frac{p}{p_x}$,(19.16)可改写成下列的样子:

$$4.27x^{\frac{1}{2}}+x^{0.1154}=2.126.$$

据此,在相当好的准确度之內,可解得$x=0.1$。

所以空气波里的压强~400大气压,速度$w=7.94$千米/秒,这个速度比爆震速度还高,但低于飞入眞空时的速度,那时$w=$
$=13.19$千米/秒。空气中的压强約为爆震波头中压强的三百分之一。

§22. 爆震产物飞散的定型二元問題

爆震物質在空間的飞散問題,即爆震产物的二元运动問題,是复杂得多的。希尔(Hill)和派克(Pack)[1]提出过几种数值的解法。他們研究的是像圖61上画的那样,在兩塊平行于炸藥面的無限大平板內爆震波的推进情况,圖61画的是垂直于炸藥面并垂直于波头的一个截面上的情形。

圖61上画有影綫的部分是尙未反应的物質;波从右向左在这塊尙未反应的物質中推进,在这个截面上,波头是直綫OO'。如果把坐标系改取为与OO'一起运动,即取一个具有爆震波速度的相

① 希尔与派克合著:"狹条炸藥爆炸时气体的橫向膨脹",文載 Proc. Roy. Soc. 191, 624, 1947。

对坐标系的話，那末整个的圖景便是定型的了。在 OO' 綫上，显然介質的速度是等于当地音速的，这是因为 $D=w+c$，而在具有速度为 D 的运动坐标系上，介質的速度必等于 $D-w=c$。我們看到，只有平面的波头可以这样移动，其移动速度在各点的法綫上都是常数——爆震速度，并且波头保持与自己相似。

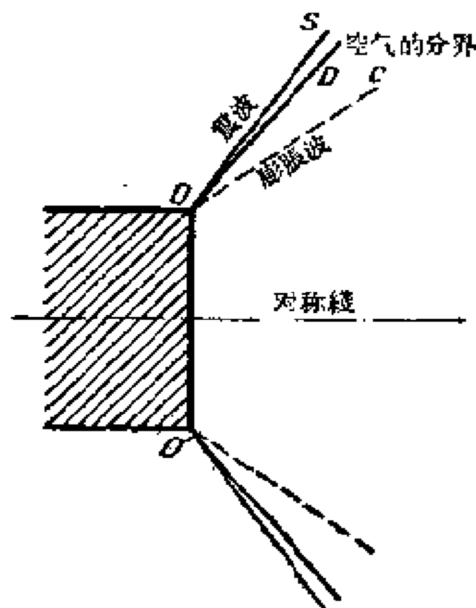


圖 61.

爆炸产物的兩边都有空气震波包圍着，空气震波的边界在圖61上就是直綫 OS。按希尔和派克的数据，这兩道波与对称中綫的夾角是 54°。OD綫是爆震产物与空气的分界綫。这兩条綫与对称中綫的夾角是 50°。最后，在爆震产物中，从 OD 綫起有膨脹波 OC 产生，OC 的角度是 35°27′。

OC 綫的意义是这样的，由空气边界上發出的諸特性綫到这条綫为止。所以，OC 綫以上是爆震产物，其运动为空气的运动所决定，OC 綫以下为未被空气运动扰动过的爆震产物。虽然如此，可是从O, O' 兩点發出来的特性綫仍然有进入 OC 綫以下的区域里去的，因此这一区里的运动决定于炸藥的有限厚度，絕不是一元的运动。

在 OC 綫上，根据定型的条件，法向的分速必是連續的，即空气的法向分速与爆炸产物的法向分速是相等的。这是任何兩种介質作定型运动时所必須滿足的条件。兩种切向分速却是不連續的，因而 OS 与 OC 兩綫之間的运动特点是有旋流动。

沿 OC 綫上空气相对于爆震波的运动速度，約为爆震速度的

60%，而爆震产物的速度則約为爆震速度的103%。

对称中綫上压强在与平板厚度相等的距离上，約下降为十分之一。气体的縱向分速在固定坐标系上約下降为八分之一。

空气波中的压强約为爆震波头中压强的$\frac{1}{500}$。

我們看到，希尔和派克并沒有用到他們用过的狀况方程，也許故意給出矛盾的絕对数字。在他們的計算里，$p=\rho_0 Dw$ 这个关系在爆震波头上是不能滿足的，因而根据他們的文章不能單値地决定有效 k 値。我們只能引用相对値，这些相对値可以假定在他們的文章里是代表实际相对値的。

斯坦紐柯維奇解决了炸藥表面上生斜爆震波以及爆炸产物向真空中飞散的問題[①]。他假設平面的爆震波头的引發点离出口很远，远到波头之后的介質压强和速度都可以認为是常数值。换句話說，他所研究的是極接近飞散区的运动，如圖62所示。尙未爆炸的部分用影綫表示。爆炸产物占 OC 綫以上的左半个圓面。OA 表示膨脹波的边界，这膨脹波由产物的自由表面开始。在 OA 綫以上，产物的狀况就像自由表面不存在一样：由表面發出的特性綫达不到 OA 綫以上的区域。

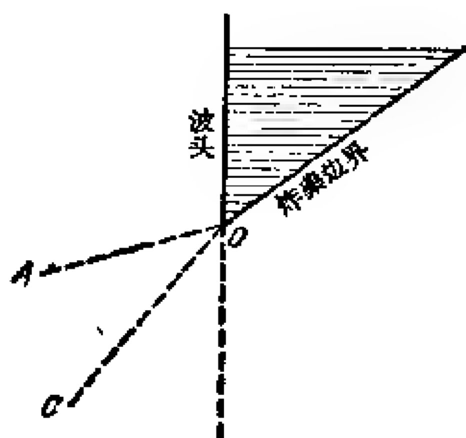


圖 62.

显然，取一个与 O 点一起运动的坐标系之后，整个的飞散运动的圖景便是完全定型的，只要像斯坦紐柯維奇那样，認为波头之后的一切物理量都是常数，并且只限于研究極接近飞散区的运动。

① 斯坦紐柯維奇著："斜爆震波的爆震产物的飞散运动"，文載苏联科学院报告，55, 315, 1947。

在这样的坐标系上，不难想像 OC 綫以上的运动圖景。波头以右的区域里，水平分速等于爆震速度加个負号，$-D$，而鉛直分速則等于 $D\operatorname{ctg}\alpha$，这直接看圖 63 就明白了。在波头以左，鉛直分速相同，而水平分速則应按 $\frac{\rho_0}{\rho}$ 之比減小。但根据相切的条件 $\frac{\rho_0}{\rho}D=$ $=c_H$（換句話說就是，波后介質的速度应是 $w-D=c_H$，因为在固定坐标系上产物的速度是 w）。

使 k 代表爆炸产物的等熵指数，那末如我們所知 $c_H=\frac{k}{k+1}D$。在这个問題里，$k=3$ 这个数値是無論如何也提不出来的。

这样，介質的流綫在波头上便是断折的：鉛直分速不变，而水平分速按 $\frac{k}{k+1}$ 之比縮短。假定把波头之后的流綫与鉛直綫之間的夾角記为 $\bar{\alpha}$，則

$$\operatorname{tg}\bar{\alpha}=\frac{k}{k+1}\operatorname{tg}\alpha.$$

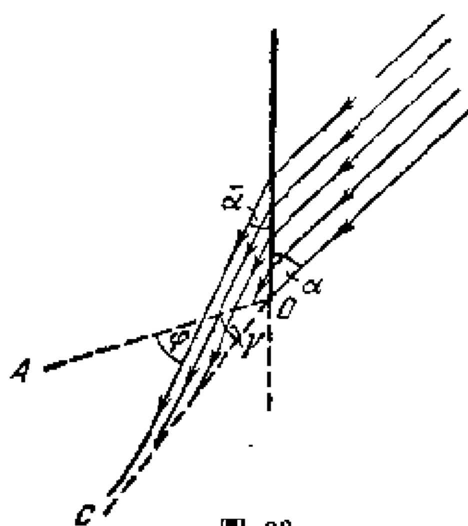


圖 63.

圖 63 上画了 $\bar{\alpha}$ 和 α 兩角，这已經是对运动坐标系而言的圖景了。問題是要找 OA 与 OC 之間那个膨脹区域里的运动，也就是要決定飞散的圖景。OA 綫上速度是連續的，这是凡膨脹波必定滿足的。

这里最好用極坐标，以 O 点为中心。r 代表至 O 点的距离，θ 代表由 OC 綫算起的角度。

現在就这个問題列下欧拉方程来。这里必須計及速度 $w_\theta=$ $=r\frac{d\theta}{dt}$ 是代表气体微团的旋轉綫速这一事实，这个旋轉与徑向加速 $\frac{w_\theta^2}{r}$（即向心加速度）有关。所以 w_r 分速的欧拉方程是这样的：

$$\rho\left(\frac{\partial w_r}{\partial t}+w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{w_\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial \theta}-\frac{w_\theta^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}. \qquad (22.1)$$

实导数我們已經算过是:

$$\frac{dw_r}{dt}=\frac{\partial w_r}{\partial t}+\frac{dr}{dt}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial w_r}{\partial \theta}=\frac{\partial w_r}{\partial t}+w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{w_\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial \theta}.$$

w_θ 分速的方程的推导是根据 $-\frac{\partial p}{\partial \theta}=\rho\frac{d}{dt}rw_\theta$ 来的，这是因为 $-\frac{\partial p}{\partial \theta}\delta V$ 是作用在 δV 体积上的作用力矩，而 $\rho\delta Vrw_\theta$ 是那塊体积的动量矩，按力学定律而有这个关系式。把实导数写出来，并除以 r，便得 w_θ 分速的欧拉方程

$$\rho\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial t}+w_r\frac{\partial w_\theta}{\partial r}+\frac{w_\theta}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial \theta}+\frac{w_r w_\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (22.2)$$

最后，連續方程可以比照中心对称运动的(7.1)式写下来。为此，只要注意現在的微元質量等于 $\rho r\delta r\delta\theta$，根据質量守恒定律，这塊微元質量的实导数便等于

$$\frac{d}{dt}\rho r\delta r\delta\theta=\rho r\delta\theta\frac{d\delta r}{dt}+\rho r\delta r\frac{d\delta\theta}{dt}+\delta r\delta\theta\frac{d\rho r}{dt}=$$

$$=\rho r\delta\theta\delta\frac{dr}{dt}+\rho r\delta r\delta\frac{d\theta}{dt}+\delta r\delta\theta\left(r\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{dr}{dt}\frac{\partial}{\partial r}\rho r+r\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right).$$

我們已經算出过 $\frac{d}{dt}\delta r=\delta\frac{dr}{dt}$，$\frac{d}{dt}\delta\theta=\delta\frac{d\theta}{dt}$。而像在 §6, §7 里那样，我們很容易証明 $\delta\frac{dr}{dt}=\delta w_r=\delta r\frac{\partial w_r}{\partial r}$；$\delta\frac{d\theta}{dt}=\frac{\delta w_\theta}{r}=\frac{\delta\theta}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial\theta}$。將上式通除以 $\delta r\delta\theta$，并將 θ 和 r 的导数分别归并一下，卽得:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho w_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho w_\theta)=0. \quad (22.3)$$

这就是所要的連續方程。

膨脹波区域的边界条件是:在 OA 綫上速度和密度等于 OA 綫以上的速度和密度，而在 OC 綫上 $p=0$。因为在 OA 綫以上，一切数值都是常数，所以边界条件里沒有包含 r 在內，卽与至 O 点的距离無关。这使我們想到，在 AOC 区中一切物理量都只决定于 θ，而与 r 無关(就是浦朗佗-迈耸問題)。在这个假設下，气体动力学

各方程取下列的形式

$$w_\theta \frac{dw_r}{d\theta} - w_\theta^2 = 0, \tag{22.4}$$

$$w_\theta \frac{dw_\theta}{d\theta} + w_\theta w_r = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\theta}, \tag{22.5}$$

$$w_r + \frac{w_\theta}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta} + \frac{dw_\theta}{d\theta} = 0. \tag{22.6}$$

要提一句，运动是定型的，一切对时間的偏导数都等于零。

膨脹波中的运动是等熵的，因此 $p = p(\rho)$，导数 $\frac{dp}{d\theta}$ 便可以代以

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{d\theta} = c^2\frac{d\rho}{d\theta}. \tag{22.7}$$

由方程(22.4)得

$$w_\theta = \frac{dw_r}{d\theta}. \tag{22.8}$$

把(22.5)式中的 $\frac{dp}{\rho d\theta}$ 代以 $\frac{c^2}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}$，然后代入(22.6)式，得

$$\left(\frac{dw_\theta}{d\theta} + w_r\right)(w_\theta^2 - c^2) = 0. \tag{22.9}$$

由(22.9)式可見，两个因子必有一个等于零。先使第一个因子等于零

$$\frac{dw_\theta}{d\theta} + w_r = 0. \tag{22.10}$$

我們可以証明，按这个等式很簡單地得到这样一个結論：w 和 ρ 到处是常数。根据(22.6)式，ρ 是常数，因而 p 也是常数。由此得知焓也到处是常数，据此，沿流綫按柏努利定理流速的絕对値也是常数，因为 $\frac{w^2}{2} + H =$ 常数。在空間某点，如果

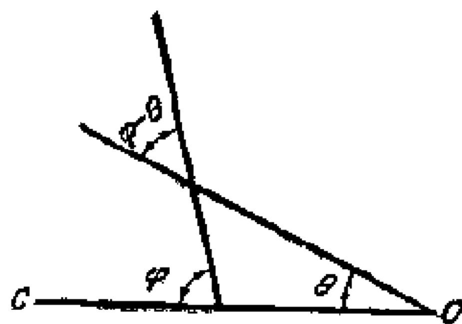


圖 64.

速度矢与笛卡尔坐标系的 x 軸（x 軸的指向与 OC 軸一致）之間的夾角是 φ，則速度矢与徑綫之間的角度便等于 $\varphi - \theta$，如圖 64 所

示。于是 $w_r = w\cos(\varphi-\theta)$, $w_\theta = w\sin(\varphi-\theta)$ 而且 w 是个常数。据此,代入(22.10)式便得

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=0,$$

即 φ 角是常数。

所以,满足(22.10)式的 w 矢在这个区里形成一个定值的速度場①。

按上述条件这是处于 OA 綫以上的区域,因而处于 OA 綫以下的必有

$$w_\theta=-c.$$

这里我們用了負号,因为 w_θ 指向 θ 减小的方向。

所以,切向分速 w_θ 在数值上永等于当地音速。在自由表面上 $c=0$,速度便是純徑向的了。把这个速度記为 q。这就是爆震产物流入真空所达的最大速度。

現在就任何一条流綫引用柏努利定理(下标"H"表示波头):

$$\frac{q^2}{2}=\frac{w_r^2}{2}+\frac{w_\theta^2}{2}+H=\frac{w_H^2}{2}+H_H. \tag{22.11}$$

但按(3.2), $H=\frac{k}{k-1}pv$, 而 $kpv=c^2$。据此,再利用 $w_\theta^2=c^2$ 的关系便得:

$$q^2=w_r^2+\frac{k+1}{k-1}w_\theta^2.$$

这里要提一句, $w_\theta=\frac{dw_r}{d\theta}$ [參看(22.8)],于是

$$\frac{dw_r}{d\theta}=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(q^2-w_r^2)}.$$

这个方程可以根据起始条件进行积分;起始条件是:当 $\theta=0$ 时,

① 当然, $p=$常数, $w=$常数这个解是沒有意义的,而且这个解無論在哪个坐标系上都能滿足各气体动力学方程。我們这里取得这个解很費了点事,原因是为了必須同时取得另一个有意义的解 $w_\theta=-c$。

$w_r=q$，因为 θ 角是从 OC 算起的，而在这条綫上 $w_\theta=0$。积分后得

$$w_r=q\cos\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta, \qquad (22.12)$$

$$w_\theta=-q\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sin\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta. \qquad (22.13)$$

現在来定这个解中的常数值，q 值很容易直接用(22.11)方程决定。初始的焓値等于 $\frac{c_{\text{II}}^2}{k-1}=\frac{D^2}{k-1}\frac{k^2}{(k+1)^2}$。初始的兩个分速我們已經知道分别等于 $-D\operatorname{ctg}\alpha$, $D\frac{k}{k+1}$。因此

$$w=D\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{k^2}{(k+1)^2}}, \qquad (22.14)$$

$$q=D\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{k^2}{k^2-1}}=\frac{D}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{k^2-\cos^2\alpha}{k^2-1}}. \qquad (22.15)$$

現在求 $\angle AOC=\gamma$。在 OA 綫上，速度是連續的。按(22.12)和(22.13)式得

$$w^2=q^2\left(\frac{k-1}{k+1}\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\right).$$

用(22.14)和(22.15)代 w 和 q，經簡單的代数演算后得：

$$\operatorname{tg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\gamma=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (22.16)$$

現在求膨脹波的位置，即求圖 65 上的 β 角。使速度矢与 OA 直綫之間的夾角 $\varphi=\beta-\bar{\alpha}$，或 $\beta=\varphi+\bar{\alpha}$。我們来証明 $\varphi=\bar{\alpha}$。事实上，

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{w_\theta}{w_r}=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\gamma=$$

$$=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\operatorname{tg}\alpha=\frac{k}{k+1}\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\bar{\alpha}.$$

所以，$\beta=2\bar{\alpha}$， $$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\bar{\alpha}=\frac{k}{k+1}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (22.17)$$

这样，就把 OA 綫和 OC 綫的位置完全决定了，也就把整个的膨脹波决定了。

斯坦紐柯維奇用 γ 角作为参变数列下了 c 和 w_r 的公式，也就是先由(22.15)得

$$q=D\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}\operatorname{ctg}^2\alpha+1}=$$

$$=D\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\gamma+1}=D\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\csc\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\gamma.$$

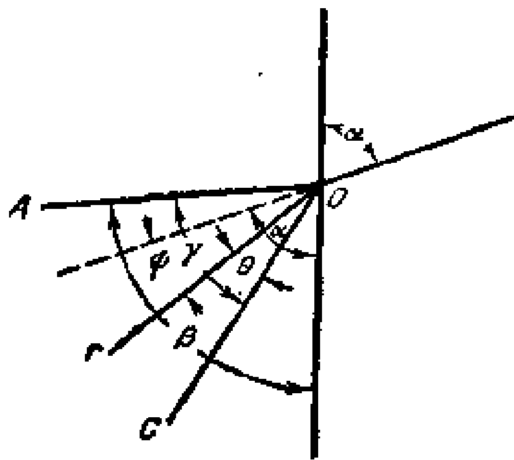


圖 65.

然后代入(22.12)和(22.13)两式。

現在变換到固定坐标系上去。如果 θ 是由 OC 綫算起的角度，那末波头和矢徑便構成 $\chi=\beta-\gamma+\theta$ 角，这个角是由鉛直綫起順时針方向算的。于是炸藥的起始界綫与矢徑之間的角便是(圖 65)

$$\psi=\chi-\alpha=\beta-\gamma+\theta-\alpha.$$

坐标系相对于炸藥起始界綫的运动速度等于 $\sqrt{D^2+D^2\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{D}{\sin\alpha}$，这个速度在矢徑上的投影等于 $\frac{D}{\sin\alpha}\cos\psi$。因此，在固定坐标系上，徑向分速的总合等于

$$\overline{w_r}=\frac{D}{\sin\alpha}\left[\sqrt{\frac{k^2-\cos^2\alpha}{k^2-1}}\cos\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta-\cos(\beta-\gamma+\theta-\alpha)\right],\tag{22.18}$$

而切向分速的总合是

$$\overline{w_\theta}=\frac{D}{\sin\alpha}\left[\sqrt{\frac{k^2-\cos^2\alpha}{k^2-1}}\sin\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta-\sin(\beta-\gamma+\theta-\alpha)\right].\tag{22.19}$$

这里，所有的角都是从 OC 綫起反时針算的。外射速度(22.19)作为角度的函数是由下式决定的:

$$\bar{q}=\sqrt{w_r^2+w_\theta^2}, \tag{22.20}$$

速度矢与炸藥表面之間的$\overline{\omega}$角按下式求:

$$\operatorname{tg}(\overline{\omega}-\psi)=\frac{w_\theta}{w_r}. \tag{22.21}$$

斯坦紐柯維奇利用(22.18)和(22.19)两个式子,求出了气流的冲量 $\rho\bar{q}$, 气流的能量 $\rho\bar{q}^2$ 以及功率 $\rho\bar{q}^3$, 三者都表为速度与炸藥表面法綫之間夹角的函数,其中 k 和 α 两个値是已知的。他証明,使这三个量达最大値的三个角差不多是相同的，这些最大値的对应角度的数値决定于 k 和 α 两个値。k 値愈大, α 愈小,則最大气流与法綫之間的夹角愈小。这是很明显的，因为波从法綫方向打过来的話,全部气流都是走在前面的。当 $k=3, \alpha=45^\circ$ 时,最大气流的角度等于 8°, 而当 $k=3, \alpha=90^\circ$ 时,最大气流的角度等于 14°。

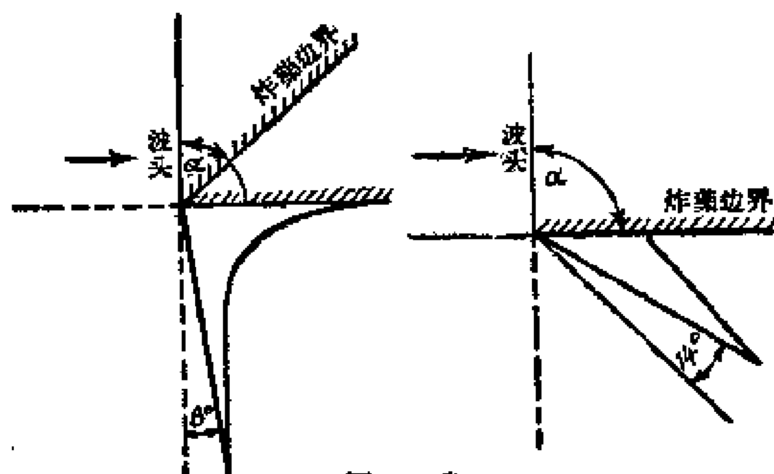


圖 66.①

圖 66 上画的是在極坐标上的 $\rho\bar{q}^2$ 的分布, $k=3$; 一个 $\alpha=45^\circ$, 一个 $\alpha=90^\circ$。

---

① 此圖原書有誤,茲改正——譯者注。

§23. 球面擴散爆震波

在这最后的一节里，我們来研究一下，設有在介質中推进的球面扩散爆震波，则在波头之后爆震产物的运动情况如何。在解这个問題的时候，爆震速度还是选为 $D=w+c$，也就是同不計損失时的平面爆震波一样。这样便得波头之后爆震产物密度的一种特殊分布規律。

由§8,§9两节我們知道，选用音速推进(这时 $D=w+c$)，有两方面的理由。$D>w+c$ 的超音速情况，根据爆震波中的化学反应动力学的道理，它是不存在的，而未从后面加以压縮的亚音速情况，根据爆震产物的运动圖景的分析，它也是不存在的。

我們假定进行化学反应的那層气体的厚度同波的半徑比起来小到可以不計，于是爆震波头上每一小段都可以近似地当作平面波头看。如果相当短促的一段时間 τ 滿足不等式

$$\tau_{反應}\ll\tau\ll\frac{r}{D},$$

而介質在这段时間內的运动可以認为是定型的，那末对这样一段平面波头就可以引用質量守恒律和冲量守恒律。但这时很明显，化学反应过程中狀况的变化是沿直綫进行的(参看圖 14, 15)。因此就沒有超音速情况存在了，因为联結那已受震波压縮过但尚未进行化学反应的介質狀况的那段直綫，应經过 (p, v) 圖綫上在能量关系上不可能存在的地区(圖 14 上的 43 綫)。

如为平面的爆震波，则根据爆震的定型推进这个条件，就沒有亚音速情况存在了。爆震产物的运动是非定型的；为了不使这种非定型性影响到爆震波的运动，从反应产物区內来的扰动就不应該追及反应区。这就排除了不从后面加以压縮的平面爆震波的亚

音速情况的存在。

这些推論对于球面爆震波全不适用：球面爆震得另作研究。

上面已經説过，我們認为反应区的厚度是小到可以略去不計的。于是这个問題里唯一的特性尺寸便是波的半徑。表征爆震的常数値是單位質量的反应热 Q，或与之有关的爆震速度 D。

現在引用类似于 §7 中关于强烈球面波的相似推理法，还有本节起始的推理法、能表征爆震波的唯一的無因次数値是

$$\frac{r}{t\sqrt{Q}} \text{ 或 } \frac{r}{Dt}.$$

凡是这个比値相等的兩个爆震波，彼此必相似。如果 $Q=$常数，也就是当球面波在均一的介質中推进时，那末一切数値都可以認为是変数

$$\xi=\frac{r}{Dt} \tag{23.1}$$

的函数。也就是应該假定：

$$\left.\begin{array}{c} w=DW(\xi),\ c=DC(\xi),\ p=\rho_0 D\mathscr{T}(\xi), \\ \rho=\rho_0 \mathrm{P}(\xi). \end{array}\right\} \tag{23.2}$$

这些式子应該代入連續方程(7.1)和欧拉方程(7.2)。

代入时可用下列的关系：

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{r}{Dt^2}\frac{dW}{d\xi}=-\frac{\xi}{t}\frac{dW}{d\xi},\ \frac{\partial w}{\partial r}=\frac{1}{t}\frac{dW}{d\xi}.$$

于是得

$$(W-\xi)\frac{d\mathrm{P}}{d\xi}+\frac{2\mathrm{P}W}{\xi}+\mathrm{P}\frac{dW}{d\xi}=0, \tag{23.3}$$

$$(W-\xi)\frac{dW}{d\xi}=-\frac{1}{\mathrm{P}}\frac{d\mathscr{T}}{d\xi}. \tag{23.4}$$

爆震产物的运动是等熵的。因此应該假定(气体的) $p=a\rho^k$。据此得

$$C=\sqrt{ka}\,\mathrm{P}^{\frac{k-1}{2}}=\sqrt{ka}\,\mathrm{P}^{\frac{1}{n}}, \tag{23.5}$$

利用(23.5)的关系，(23.3)和(23.4)两方程便可以写为

$$(W-\xi)n\frac{dC}{d\xi}+\frac{2CW}{\xi}+C\frac{dW}{d\xi}=0, \tag{23.6}$$

$$(W-\xi)\frac{dW}{d\xi}=-nC\frac{dC}{d\xi}. \tag{23.7}$$

就这两个方程解 $\frac{dC}{d\xi}$ 和 $\frac{dW}{d\xi}$ 两导数，得

$$\xi\frac{dC}{d\xi}=\frac{2}{n}\frac{CW(W-\xi)}{C^2-(W-\xi)^2}, \tag{23.8}$$

$$\xi\frac{dW}{d\xi}=-\frac{2C^2W}{C^2-(W-\xi)^2}. \tag{23.9}$$

这一个方程組只用下列的替代便能化为一个一阶的方程：

$$\left.\begin{aligned}C&=Z\xi,\\ W&=V\xi.\end{aligned}\right\} \tag{23.10}$$

利用这个替代，并以一式除另一式以消去 ξ，即得一个一阶的方程

$$\frac{dZ}{dV}=\frac{Z}{V}\frac{(1-V)^2-Z^2-(k-1)V(1-V)}{(1-V)^2-3Z^2}. \tag{23.11}$$

现在我們来研究一下这个(23.11)方程。首先我們看到，(23.8)—(23.9)方程組有一个解是 $W=0$，$C=$ 常数，这代表靜止狀况。这种狀况存在于波中心附近，因为沒有泉流的話，波中心介質的徑向速度应該等于零。这一狀况应和爆震波头之后的运动接連起来，而且在接連处，兩边的介質速度和压强应相等，或者說兩边的速度与音速应相等也一样。

由于这一个关系，我們就需要求方程(19.48)在 $V=0$ 綫附近积分曲綫的性态。在这条綫上可以划出这样一个点来，在这一点上方程右側的分子也变为零，这就是 $Z=1$ 那一点。

在 $Z=1$, $V=0$ 这一点附近，方程(23.11)变成綫性方程了，并可以写为

$$\frac{d}{dV}(Z-1)=\frac{k-1}{2}+\frac{Z-1}{V}. \tag{23.12}$$

这个方程的积分是

$$Z-1=\frac{k-1}{2}V\ln\frac{V}{A},\tag{23.13}$$

式中的 A 是积分常数。

給 A 以不同的常数值，可以得到一束經过 $Z=1, V=0$ 点的积分曲綫。在 $Z=1, V=0$ 这一点上，导数 $\frac{dZ}{dV}$ 等于 ∞。所以积分曲綫的分布，大致像圖 67 所画的那样。圖上还画了一条經过 $Z=1$ 点的直綫，直綫的方程是 $Z+V=1$。在这条直綫之下，$(1-V)^2<Z^2$，或按 (23.9) 式，$\frac{d\xi}{dW}<0$。在这条直綫之上，$\frac{d\xi}{dV}>0$。

在直綫 $Z+V=1$ 本身上，速度沒有極値(因 $dW\neq0$)，跨过这条綫，$d\xi$ 应变符号，这也就是說，由靜止区 ($Z=1, V=0$) 开始的积分曲綫在这条直綫以上是沒有实际意义的：而跨过直綫相当于 dt 变符号。因此，积分曲綫不可能跨过这条直綫，而应該止于直綫，或不到直綫就完畢，即低于直綫。

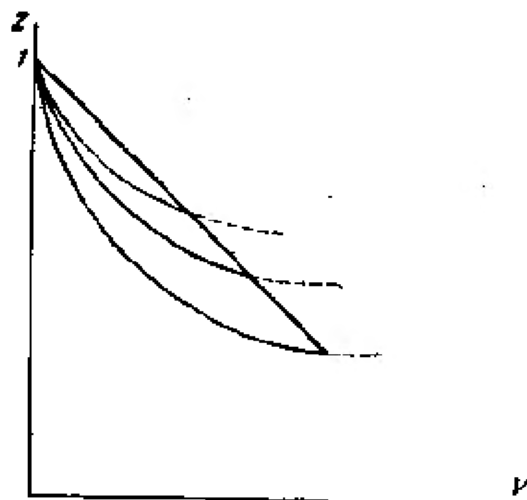


圖 67.

在直綫以下，有不等式 $V+Z<1$ 成立，或說有 $w+c<\frac{r}{t}$ 成立。积分曲綫的終点代表爆震波的位置，所以 $\frac{r}{t}$ 就是爆震波的速度，这时 V 和 Z 都是积分曲綫終点的值。所以，曲綫終点在 $V+$ $+Z=1$ 直綫以下的情况，代表爆震以超音速推进，这我們在前面从化学动力学的推理知道是不可能存在的。可見爆震波只能对应于积分曲綫恰終止于 $Z+V=1$ 的曲綫上，$w+c=D$ 这也証明音速情况是这时唯一存在的情况。由此得出，像平面波的情形一样在气体爆震波上，$D=\sqrt{2Q(k^2-1)}$。

我們把(23.8)和(23.9)作了数值积分。w的大致分布表示在圖68上。在坐标原点附近的靜止区里，只包括極少的一部分介質(百分之儿)。

在震波的波头附近，$\frac{dw}{d\xi}$和$\frac{dc}{d\xi}$兩导数趋于無限大，与$\frac{1}{\sqrt{\xi_{波頭}-\xi}}$成正比地趋于無限大。这是由于我們假定反应区的厚度为零的緣故。这个假定在平面爆震的情形中是沒有矛盾的，因为在爆震波头附近，一切物理量的导数都是有限値，所以波头的厚度很小，就是說一切物理量的变化很小。如为球面爆震，則波头厚度上一切物理量的变化是有限値，所以反应区之后的介質运动会影响到波头中的反应过程。这就使球面爆震波的速度低于平面爆震波的速度。

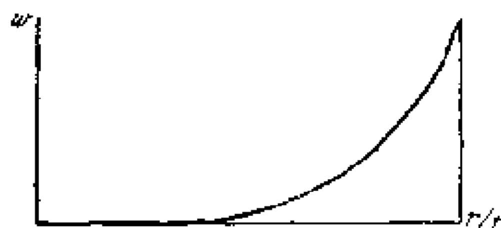


圖 68.

我們还要指出，靜止区与反应产物运动区的連接点有値得注意之处。在連接点上，一阶导数$\frac{dw}{d\xi}$变为零，一切高阶的导数都是無限大。所以，在那一点上，动力学各量并無不連續的現象。这一点相对于中心移动的速度等于靜止区中的音速。

在这个例子上，我們看到了利用自型变数的好处。前面講到平面爆震波时在相应的地方也用过自型变数，不过那时用了自型变数毫不比用特性綫法多得些什么新东西出来。

中俄名詞对照表

三　画

三硝基甲苯(卽 TNT)　тротил

四　画

分水嶺曲綫　водораздел

反应机構　механизм реакции

中心对称問題　центрально—симметричная задача

五　画

可炸混合气　гремучая смесь

六　画

自型运动　автомодельное движение

米海里松直綫　прямая Михельсона

过度压縮的爆震波　пересжатая детонационная волна

压电晶体指示器　пьезокварцевый индикатор

压縮不足的爆震波　недосжатая детонационная волна

动量密流　плотность потока количества движения

八　画

雨貢紐絕热綫　адиабата Гюгонио

环三次甲基三硝胺　циклотриметилентрицитамин

实导数　субстанциальная производная

附面層　пограничный слой

九　画

契浦門—儒格假設　гипотеза Чепмен—Жуге

契浦門—儒格点　точка Чепмен—Жуге

活躍能量　энергия активации

突躍压縮波(一名震波)　ударная волна

总导数　полная производная

柏努利方程　уравнение Бернулли

十　画

弱震波　слабая ударная волна

弱突躍　слабый разрыв

泰安炸藥　$O(CH_2ONO_2)_4$ тэн

热函数　тепловая функция

浦朗铊—迈耶問題　задача Прандтля—Майера

特屈兒炸藥　тетрил

特性綫　характеристика

泉流　источник

十一画

黑索金炸藥　гексоген

控制面　контрольная поверхность

剻爆震波　ретонационная волна

密流　плотность потока

十二画

硝酸甲酯(卽 CH_3ONO_2)　метилнитрат

硝酸酯　сложный эфир азотной

硝基化合物　нитросоединение

量热彈（又名彈卡計或量热計） калориметрическая бомба

單头螺旋爆震 одноголовая спиновая детонация

十三画

叠氮化鉛 азид свинца

裝塡密度 плотность заряжания

十五画

質量密流 плотность потока вещества

震波 ударная волна

十七画

螺旋爆震 спиновая детонация

賽克罗啓特炸藥 циклоцит

十九画

爆炸極限 взрывный предел

爆震引子 капсюль—детонатор